Algorithmen und Berechnungskomplexität II, SS 13
Aufgabenblatt 3
Universität Bonn, Institut für Informatik, Abteilung I

- *Die Lösungen können bis Mittwoch, 08.05., 12:15 Uhr in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang im kleinen Raum auf der linken Seite). Gebt bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Gruppennummer (A-I) an, wie auf der Vorlesungswebseite angegeben.*
- *Abgabe in festen Gruppen von 2-3 Personen ist erlaubt.*
- *Wer noch keiner Übungsgruppe zugeordnet ist und dennoch am Übungsbetrieb teilnehmen möchte, kontaktiert bitte Rainer Penninger (penninge@cs.uni-bonn.de).*

Aufgabe 6: Anzahl Bijektionen (4 Punkte)

Seien A und B zwei nichtleere, endliche Mengen mit jeweils n Elementen. Bezeichne $B(A, B)$ die Menge aller bijektiven Funktionen von A nach B. Zeigen Sie per Induktion über n, dass $|B(A, B)| = n!$ gilt.

Aufgabe 7: Rekursiv aufzählbare Sprachen (4 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und L_1 und L_2 zwei rekursiv aufzählbare (nicht: rekursive) Sprachen über Σ. Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

1. Die Sprache $L_1 \cup L_2$ ist wieder rekursiv aufzählbar.
2. Das Komplement von L_1, nämlich $\Sigma^* \backslash L_1$ ist wiederum rekursiv aufzählbar.

Bitte wenden!

Aufgabe 8: Funktionsgraphen und Umkehrfunktion (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ eine (ggf. partielle) Funktion und M_f eine Turingmaschine, die bei Eingabe x den Wert $f(x)$ berechnet (falls f an der Stelle x definiert ist). Bezeichne

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid f \text{ ist an der Stelle } x \text{ definiert}\}$$

den Funktionsgraphen G_f von f. Zeigen Sie:

1. Ist f eine totale Funktion, dann ist G_f entscheidbar.

2. Wenn f eine partielle Funktion ist, dann ist G_f aufzählbar.

3. Zeigen Sie, dass eine Turingmaschine $M_{f^{-1}}$ existiert, die bei Eingabe y mit Ausgabe x terminiert, so dass x ein Wert ist mit $f(x) = y$, falls es ein solches x gibt.

   Tipp: Setzen Sie geschickt eine Turingmaschine $\tilde{M}_M$ ein, die bei Eingabe (x, k), $k \in \mathbb{N}$, die ersten k Berechnungsschritte einer anderen Turingmaschine M mit Eingabe x ausführt.

4. Geben Sie eine Turingmaschine $M^*_{f^{-1}}$ an, die bei Eingabe y den kleinsten Wert x mit $y = f(x)$ berechnet, falls ein solcher Wert x existiert, oder begründen Sie, warum es eine solche Turingmaschine nicht geben kann.

Aufgabe 9: Unterprogrammtechnik (4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Unterprogrammtechnik, dass

$$L_3 = \{\langle M\rangle \mid \text{DTM } M \text{ akzeptiert genau 3 Eingaben}\}$$

nicht entscheidbar ist.

Tipp 1: Unterprogrammtechnik zum Nachweis von Unentscheidbarkeit:

Um nachzuweisen, dass eine Sprache L nicht rekursiv/entscheidbar ist, genügt es zu zeigen, dass man durch Unterprogrammaufruf einer TM M_L, die L entscheidet, ein anderes Problem L' entscheiden kann, das bereits als nicht rekursiv/entscheidbar bekannt ist.

Tipp 2: Das Halteproblem $H = \{\langle M\rangle x | M \text{ hält bei Eingabe } x\}$ ist nicht entscheidbar.