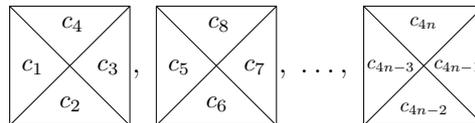


Aufgabe 18: Dominosteine**(4 Punkte)**

In der Vorlesung haben wir gelernt, dass das *Postsche Korrespondenzproblem* unentscheidbar ist. Dieses Problem ist eine Art Dominostein-Problem. Bei diesen gilt es zu entscheiden, ob eine vorgegebene Menge von Dominosteinen so angeordnet werden kann, dass eine Bedingung erfüllt ist. Wir wollen in dieser Aufgabe ein paar entscheidbare Varianten von Dominostein-Problemen kennenlernen. Die Aufgabe ist in allen im Folgenden vorgestellten Varianten zu entscheiden, ob ein vorgegebenes Gebiet mit einer gegebenen endlichen Menge an Dominosteinen *gepflastert* werden kann. Wir sagen eine endliche Menge von Dominosteinen



pflastert ein bestimmtes Gebiet G , wenn man Kopien der Steine so in G anordnet kann, dass G komplett überdeckt ist, und sich nur Flächen mit gleichen Farben (hier durch Zahlen symbolisiert) berühren. Jeder Steintyp aus dem endlichen Vorrat kann beliebig oft, auch unendlich oft verwendet werden. Man beachte jedoch, dass es bei der Grundversion des Problems nicht erlaubt ist, die Steine zu drehen oder zu spiegeln. Links bleibt links und oben bleibt oben.

Begründen Sie für die folgenden Varianten des Dominostein-Problems, dass sie entscheidbar sind. Bei diesen komplexeren Problemen sollen Sie nicht mehr versuchen, die Entscheidbarkeit durch Angabe einer konkreten Turingmaschine (oder durch Programmcode) nachzuweisen. Es genügt eine abstrakte Erklärung des Berechnungsverfahrens. Dennoch muss klar sein, wie der Algorithmus genau arbeitet, so dass er im Prinzip auch auf Turingmaschinen programmiert werden könnte.

Bei Varianten 1 und 2 soll jeweils entschieden werden, ob die gesamte Ebene \mathbb{R}^2 mit einer gegebenen endlichen Menge an Dominosteinen gepflastert werden kann.

1. Bei der ersten Variante ist es erlaubt, neben den gegebenen Dominosteinen von jedem Dominostein ebenfalls beliebig viele (um ganzzahlige Vielfache von 90°) gedrehte Kopien der gegebenen Dominosteine zu verwenden.

2. Bei der zweiten Variante ist Drehen wieder verboten. Jedoch ist die betrachtete Mengen von Steinen eingeschränkt. Es sollen nur Steine betrachtet werden, die jeweils oben und unten die Farbe 0 haben.
3. Jetzt betrachten wir wieder alle möglichen Mengen von Dominosteinen, und Drehen ist verboten. Ist dann entscheidbar, ob eine gegebene Steinmenge für ein gegebenes $m \in \mathbb{N}$ ein Quadrat aus $m \times m$ Zellen pflastert?