Universität Bonn, Institut für Informatik I
Probeklausur Algorithmische Geometrie SS 2013, Bearbeitungszeit 100 Minuten

Die Klausur am Ende des Semesters wird voraussichtlich in Art und Umfang dieser Probeklausur ähneln, aber natürlich können in ihr auch Aufgaben zu allen anderen in der Vorlesung behandelten Themen vorkommen.

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Für jede richtige Antwort gibt es einen Pluspunkt, für jede falsche einen Minuspunkt. Wird weder *wahr* noch *falsch* angekreuzt, gibt es 0 Punkte. Bei allen Aussagen und Strukturen, wo Abstände zwischen Punkten in der Ebene auftreten, sind euklidische Abstände gemeint.

	wahr	falsch
Ein dichtestes Paar von n reellen Zahlen zu bestimmen hat Zeitkomplexität $\Theta(n \log n)$.	☐	☐
Ein dreidimensionaler Bereichsbaum zur Speicherung von n Punkten im $\mathbb{R}^3$ benötigt $O(n)$ viel Speicherplatz.	☐	☐
Jedes einfache Polygon kann trianguliert werden.	☐	☐
Es gibt immer zwei Kanten in der Delaunay-Triangulation einer Punktmenge, die sich echt kreuzen.	☐	☐
Die konvexe Hülle von n bereits nach y-Koordinaten sortierten Punkten lässt sich in Zeit $O(n)$ bestimmen.	☐	☐
Es gibt ein einfaches Polygon mit 17 Ecken, welches optimal mit genau 6 stationären Wächtern bewacht werden kann.	☐	☐

Aufgabe 2 [6 Punkte]

Sei S eine Menge von n Liniensegmenten in der Ebene. Beweisen oder widerlegen Sie: die konvexe Hülle von S stimmt mit der konvexen Hülle der $2n$ Endpunkte von S überein.

Antwort:

Aufgabe 3 [6 Punkte]

a) Zeichnen Sie (inklusive der Splitgeraden) einen balancierten 2d-Baum für die angegebene Punktmenge. Skizzieren Sie darin die Anfrage des angegebenen rechteckigen Bereichs Q wie folgt:

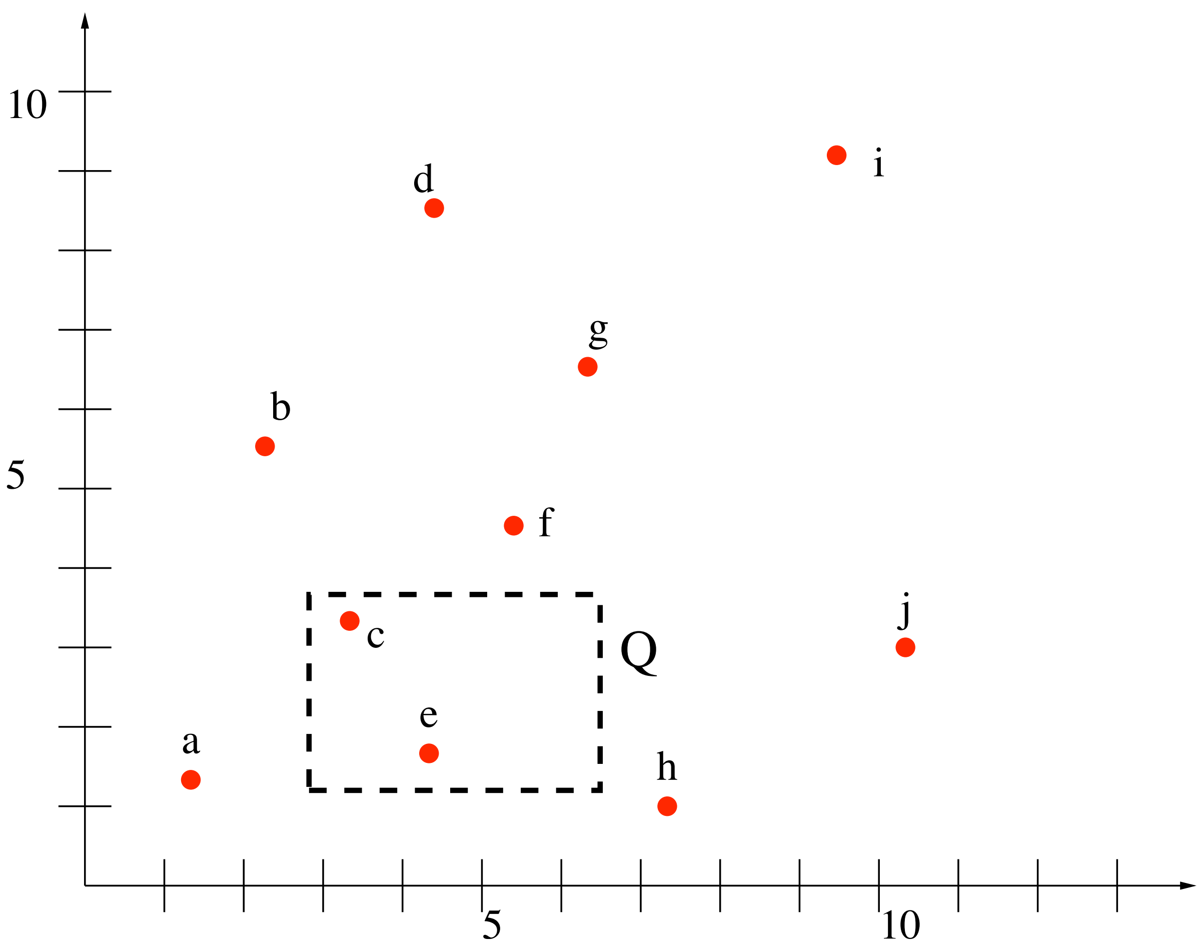
- Markieren Sie alle Knoten des Baumes, die der Algorithmus bei dieser Anfrage beschreitet, farbig.

b) Beantworten Sie folgende Fragen mit den bekannten oberen Schranken in O-Notation.

1) Laufzeit zum Aufbau des 2d-Baumes für n Punkte:

2) Platzbedarf eines 2d-Baumes für n Punkte:

3) Laufzeit für $[a, b] \times [c, d]$ mit a vielen Punkten im Anfragebereich:



Antwort bitte auf der Rückseite des vorherigen Blattes

Aufgabe 4 [6 Punkte]

In der Vorlesung wurde ein Sweepline-Verfahren zur Konstruktion des Voronoi-Diagrammes einer Punktmenge $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ in der Ebene vorgestellt. Dabei arbeitete sich eine Wellenfront (Wavefront) aus Parabelstücken die einer Geraden H folgte, von links nach rechts durch die Ebene und erzeugte dabei das Diagramm.

a) Zeigen Sie: Zu jedem Punkt $h \in H$ gibt es einen Punkt $p \in S$, so dass der Schnittpunkt des Segments $\overline{ph}$ mit der Wellenfront, von p höchstens so weit entfernt ist, wie von h.

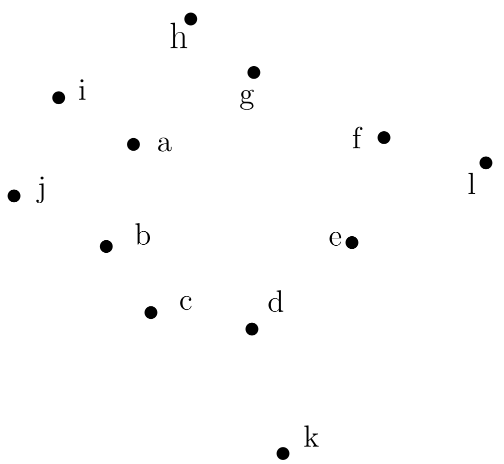
b) Beweisen Sie, dass zu jedem Zeitpunkt des Sweeps alle Ecken der Wellenfront auf Kanten oder Knoten des endgültigen Voronoi-Diagrammes liegen.

c) Zeichnen Sie ein Beispiel, in dem ein Punkt p aus S zur aktuellen Wellenfront mehr als ein Parabelstück beiträgt (in dessen Wellenfront es also mindestens zwei Stücke der von p und H erzeugten Parabel gibt, die von einem oder mehreren anderen Parabelstücken unterbrochen werden).

Antwort:

Aufgabe 5 [6 Punkte]

Betrachten Sie das folgende Bild:



Zeichnen Sie in das Bild das Konturpolygon der Punktmenge ein. Benutzen Sie dann den Algorithmus aus der Vorlesung, um aus dem Konturpolygon die konvexe Hülle der Punktmenge zu berechnen. Notieren Sie dazu die durchlaufenen Knoten in der richtigen Reihenfolge und beschreiben Sie, zu welchem Zeitpunkt welche Kanten durch welche anderen Kanten ersetzt werden.

Antwort:

Aufgabe 6 [6 Punkte]

Beweisen Sie per Induktion:
Jede Triangulation eines einfachen Polygons mit n Ecken besitzt genau $n - 3$ Diagonalen. (Hier dürfen Sie verwenden, dass jedes Polygon mit mehr als drei Ecken mindestens eine Diagonale besitzt.)

Antwort:

Aufgabe 7 [6 Punkte]

Sei S eine Menge von Punkten in der Ebene und $s \in S$.
Beweisen Sie: Hat ein Punkt $p \in S$ zu s einen kleineren Abstand als alle anderen Punkte aus S, so sind die Voronoi-Regionen von s und p im Voronoi-Diagramm von S benachbart.