Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1

3+3+2 Punkte

Wir betrachten metrische Räume $\mathcal{M} = (M, d)$, für die $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge ist und die Metrik d folgende Eigenschaft besitzt: Für je drei Punkte $x, y, r \in M$, die auf einer Geraden liegen, wobei y zwischen x und r liegt, und einen beliebigen Punkt $p \in M$ folgt aus $d(x,p) \leq d(r,p)$, dass auch $d(y,p) \leq d(r,p)$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass der Raum $\mathbb{R}^n$, ausgestattet mit dem euklidischen Abstand, ein solcher Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass der $\mathrm{SC}_{\frac{1}{2}}$-Algorithmus 3-kompetitiv für das 2-Server-Problem in jedem solchen metrischen Raum $\mathcal{M}$ ist.

(c) Geben Sie eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ an, für die der metrische Raum $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, d)$ nicht die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 7.2

8 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender einfacher gewichteter Graph, der eine Metrik $\mathcal{M}$ darstellt, und sei $T = (V, E_T)$ ein minimaler Spannbaum von G. Für Korollar 3.10 benötigen wir eine Aussage über den Zusammenhang der Metrik $\mathcal{M}$ und der von T induzierten Baummetrik $\mathcal{M}_T$.

Zeigen Sie, dass gilt: Ist $e = \{x, y\}$ eine Kante von G mit Gewicht $w(e)$, dann beträgt die Länge des Weges von x nach y im Spannbaum T höchstens $(N-1) \cdot w(e)$, wobei $N = |V|$ die Größe der Metrik $\mathcal{M}$ ist.

Aufgabe 7.3

8 Punkte

Wir betrachten das k-Server-Problem auf einem Kreis C mit Umfang 1. Der Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in C$ ist gegeben durch die Länge des kürzeren Kreisbogens, der sie verbindet.

Geben Sie einen $2k$-kompetitiven randomisierten Online-Algorithmus für das k-Server-Problem auf dem metrischen Raum (C, d) an.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst folgende Aussage: Trennen wir den Kreis C an einem uniform zufällig gewählten Punkt $p \in C$ auf und interpretieren das so entstandene Kreissegment C' als Linie mit der üblichen Metrik d', dann gilt für zwei beliebige Punkte $x, y \in C$ die Ungleichung $\mathbf{E}\left[d'(x, y)\right] \leq 2d(x, y)$, wobei der Erwartungswert über alle Punkte $p \in C$ gebildet wird.