Anwendungen Triangulation

Elmar Langetepe
University of Bonn

Art Gallery Probleme

Art Gallery Probleme

- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?

Art Gallery Probleme

- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?
- Sichtbarkeit: Punkt $p \in P$, Sichtbarkeitspolygon: $\text{vis}_P(p)$

Art Gallery Probleme

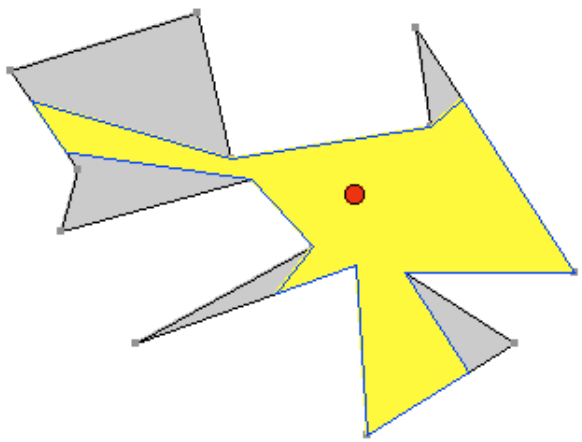
- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?
- Sichtbarkeit: Punkt $p \in P$, Sichtbarkeitspolygon: $\mathsf{vis}_P(p)$
- Vereinigung ergibt das gesamte Polygon!

Art Gallery Probleme

- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?
- Sichtbarkeit: Punkt $p \in P$, Sichtbarkeitspolygon: $\text{vis}_P(p)$
- Vereinigung ergibt das gesamte Polygon!
- Finde kleinste Menge an Punkten: $P = \bigcup_{i=1}^{k} \text{vis}_P(p_i)$!

Art Gallery Probleme

- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?
- Sichtbarkeit: Punkt $p \in P$, Sichtbarkeitspolygon: $\text{vis}_P(p)$
- Vereinigung ergibt das gesamte Polygon!
- Finde kleinste Menge an Punkten: $P = \bigcup_{i=1}^{k} \text{vis}_P(p_i)$!



Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

Theorem 4.21: Ein einfaches Polygon P mit n Ecken kann stets mit $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächtern überwacht werden. Es gibt beliebig große Beispiele, wo diese Anzahl auch benötigt wird.

Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

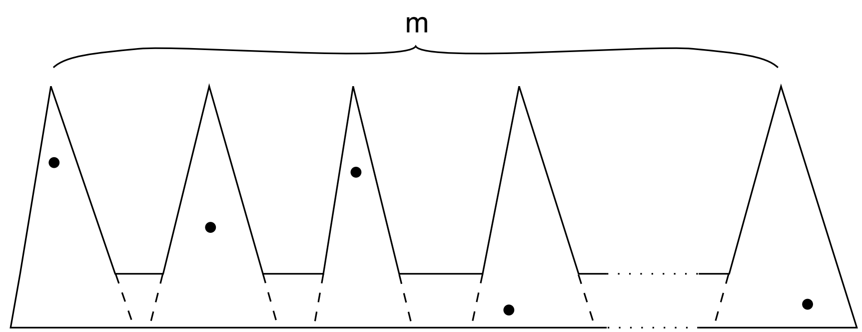
Theorem 4.21: Ein einfaches Polygon P mit n Ecken kann stets mit $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächtern überwacht werden. Es gibt beliebig große Beispiele, wo diese Anzahl auch benötigt wird.

Untere Schranke, skalierbares Beispiel:

Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

Theorem 4.21: Ein einfaches Polygon P mit n Ecken kann stets mit $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächtern überwacht werden. Es gibt beliebig große Beispiele, wo diese Anzahl auch benötigt wird.

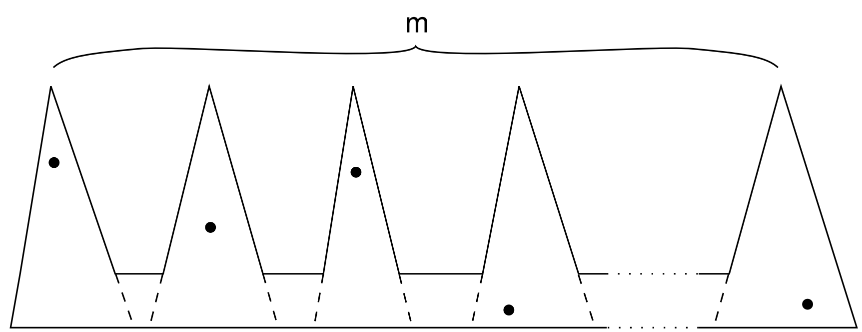
Untere Schranke, skalierbares Beispiel:



Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

Theorem 4.21: Ein einfaches Polygon P mit n Ecken kann stets mit $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächtern überwacht werden. Es gibt beliebig große Beispiele, wo diese Anzahl auch benötigt wird.

Untere Schranke, skalierbares Beispiel:



Obere Schranke: Beweis mit Triangulation!

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!
- k-Färbbarkeit eines Graphen $\left(G = (V, E), E \subseteq V \times V\right)$

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

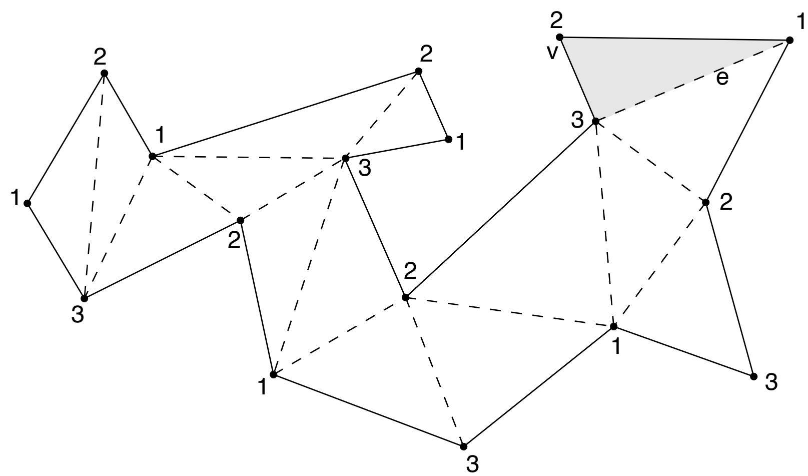
- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!
- k-Färbbarkeit eines Graphen ($G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$)
- Färbe Knoten, jede Kante zwei verschiedene Farben
- Mindest Anzahl k Farben

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!
- k-Färbbarkeit eines Graphen ($G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$)
- Färbe Knoten, jede Kante zwei verschiedene Farben
- Mindest Anzahl k Farben
- Chromatic Number, 4-Färbbarkeit planarer Graphen

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!
- k-Färbbarkeit eines Graphen ($G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$)
- Färbe Knoten, jede Kante zwei verschiedene Farben
- Mindest Anzahl k Farben
- Chromatic Number, 4-Färbbarkeit planarer Graphen



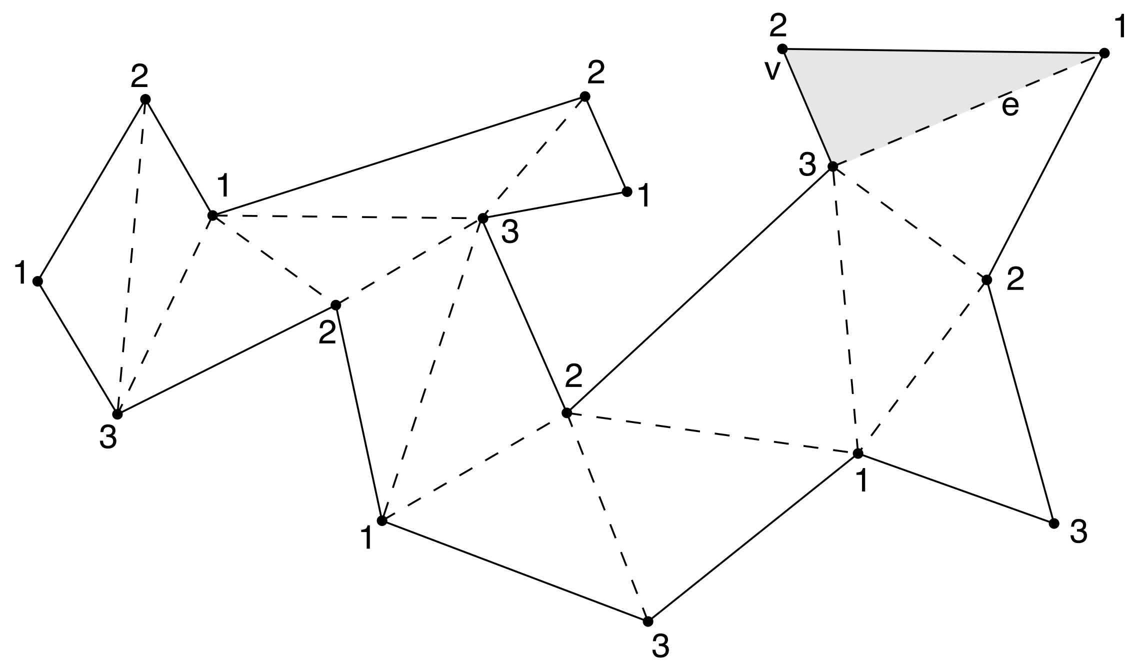
Art Gallery Probleme: Obere Schranke

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

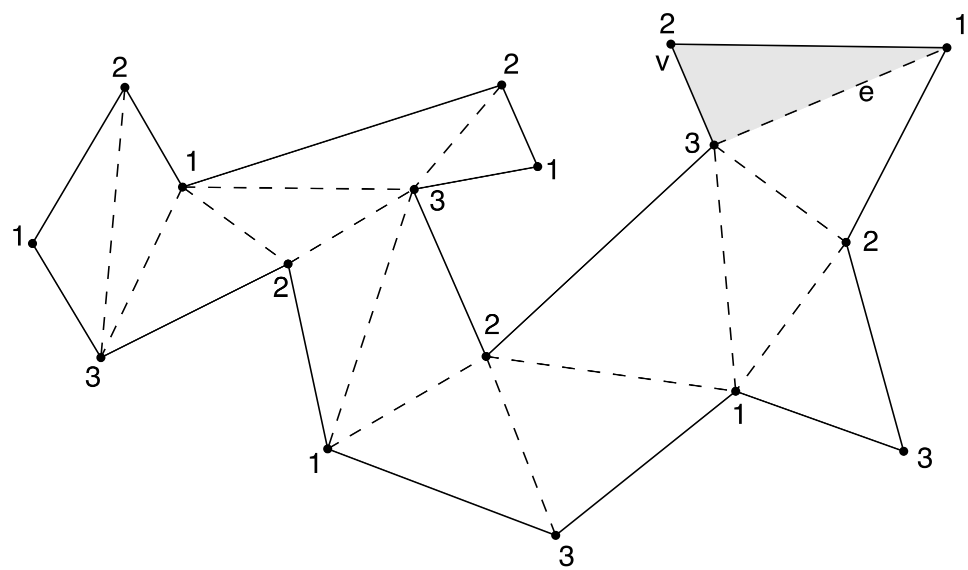
- Beweis: 3-Färbbarkeit einer Triangulation, Induktion!

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

- Beweis: 3-Färbbarkeit einer Triangulation, Induktion!

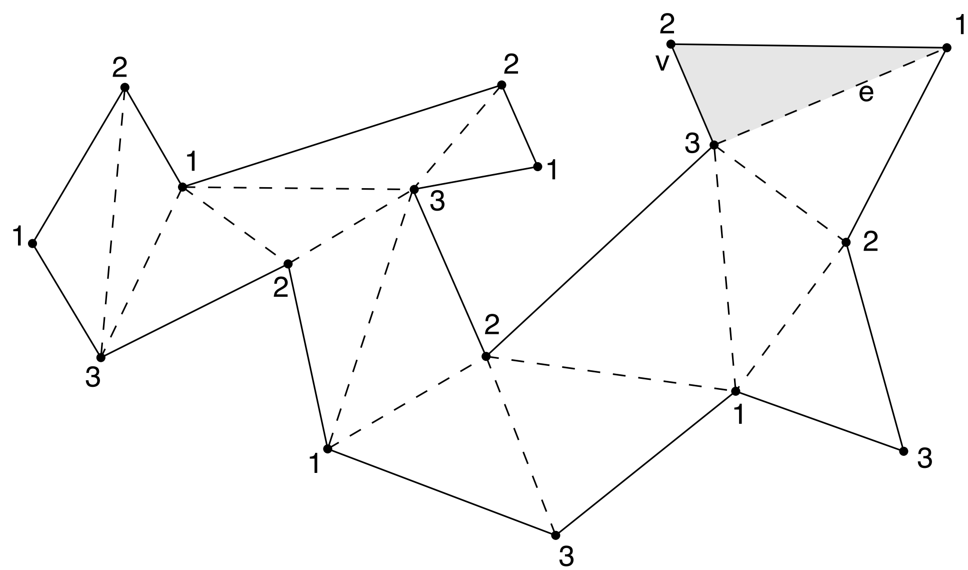


Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$



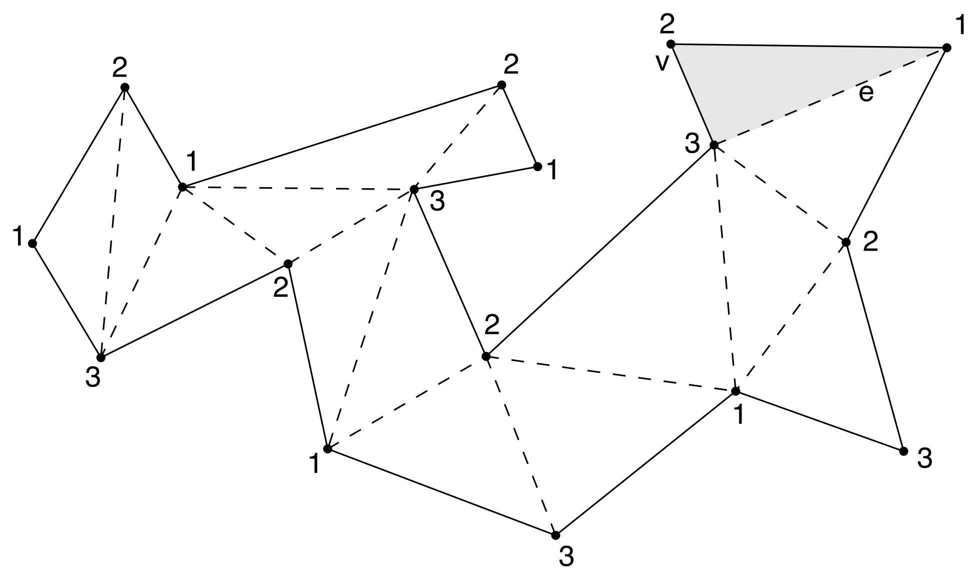
Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

- 3-Färbung verwenden



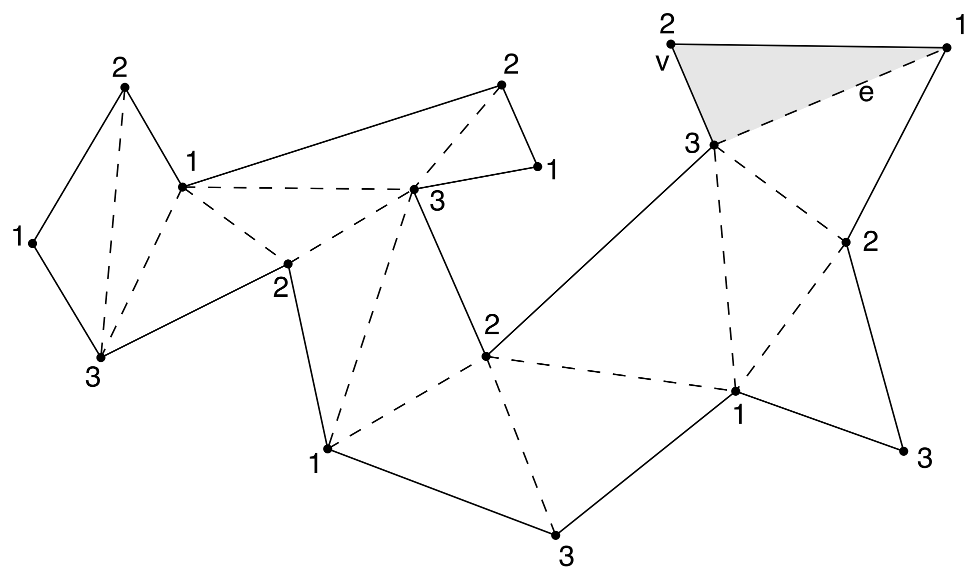
Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

- 3-Färbung verwenden
- Wähle eine Farbe, dann ist jedes Dreieck bewacht, einsehbar



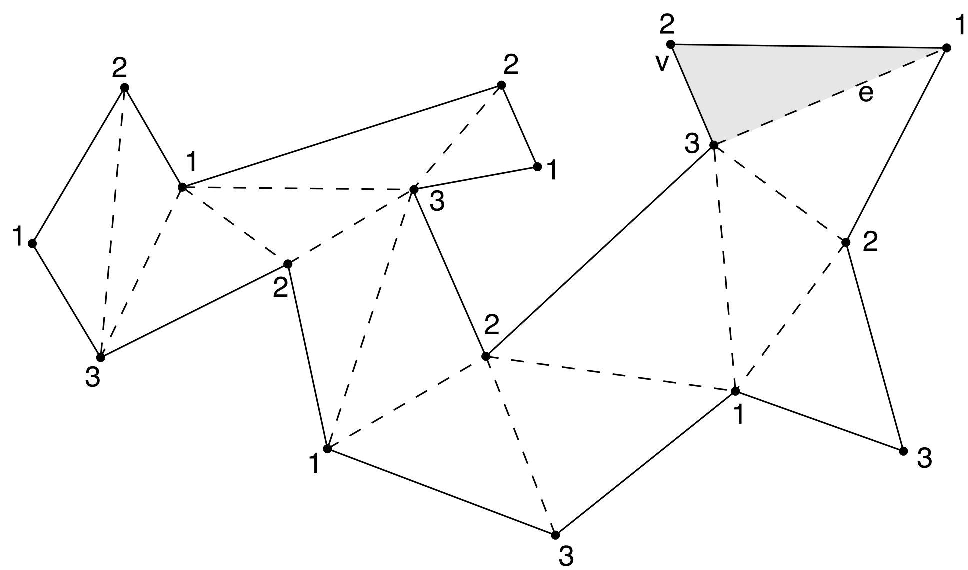
Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

- 3-Färbung verwenden
- Wähle eine Farbe, dann ist jedes Dreieck bewacht, einsehbar
- Es existiert eine Farbe mit $\leq \frac{n}{3}$ vielen Knoten

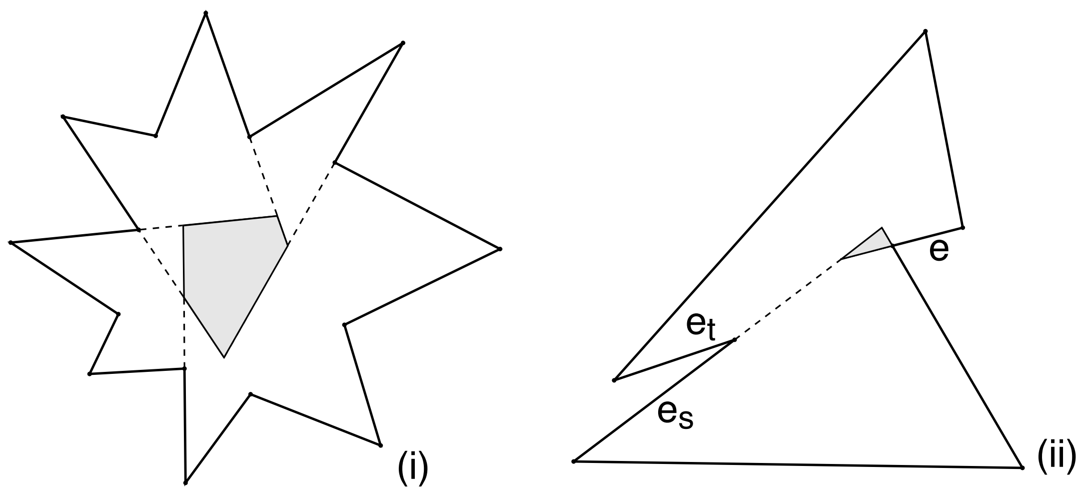


Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

- 3-Färbung verwenden
- Wähle eine Farbe, dann ist jedes Dreieck bewacht, einsehbar
- Es existiert eine Farbe mit $\leq \frac{n}{3}$ vielen Knoten
- Ganzzahlig reicht: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

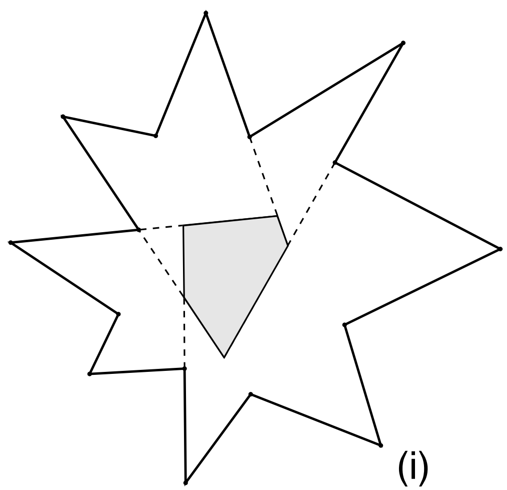


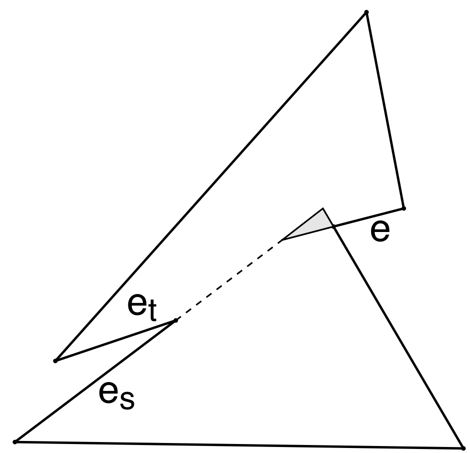
Anwendung Drehwinkel: 4.4 Kern eines Polygons



Anwendung Drehwinkel: 4.4 Kern eines Polygons

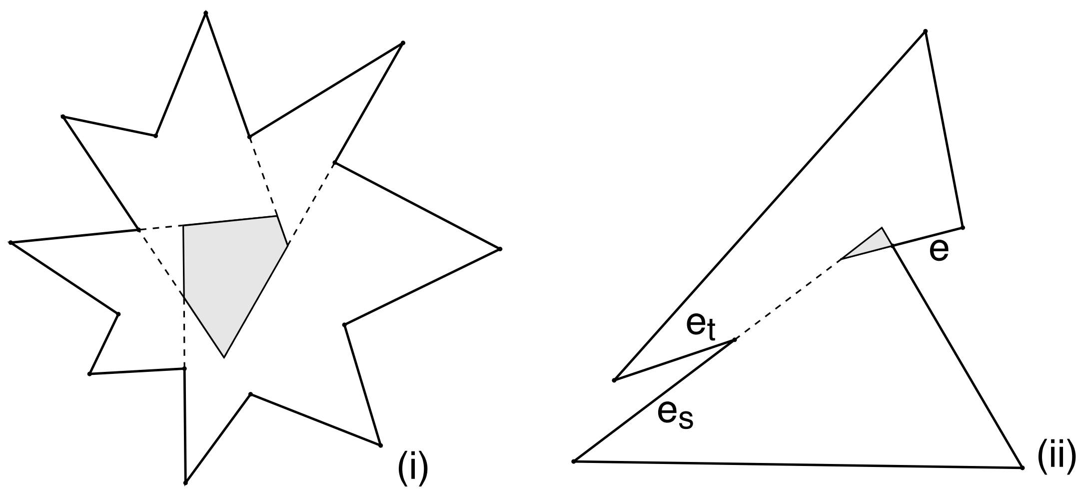
- Definition: Sternförmiges Polygon, es ex. $p \in P$ mit $\text{vis}_P(p) = P$





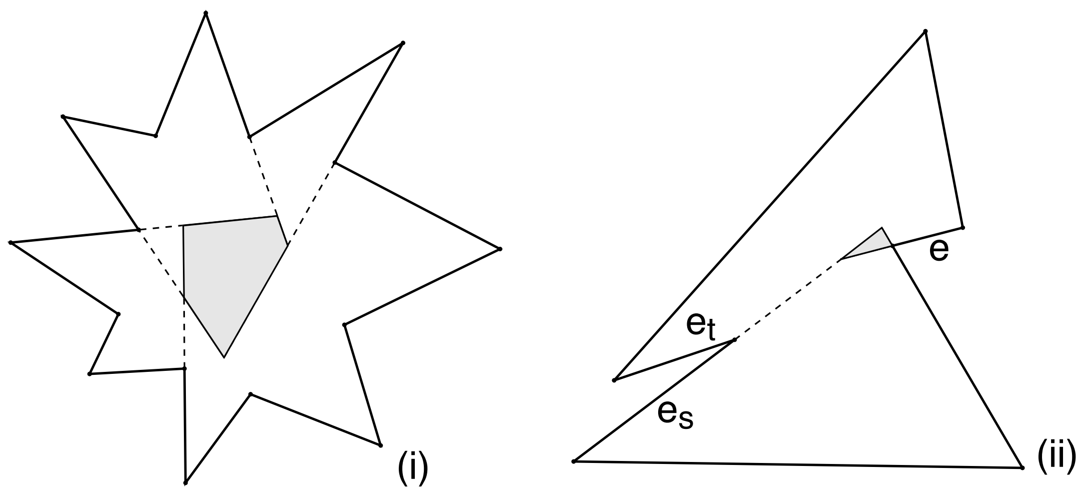
Anwendung Drehwinkel: 4.4 Kern eines Polygons

- Definition: Sternförmiges Polygon, es ex. $p \in P$ mit vis$_P(p) = P$
- Definition: Kern, ker$(P) := \{p \in P | \text{vis}_P(p) = P\}$

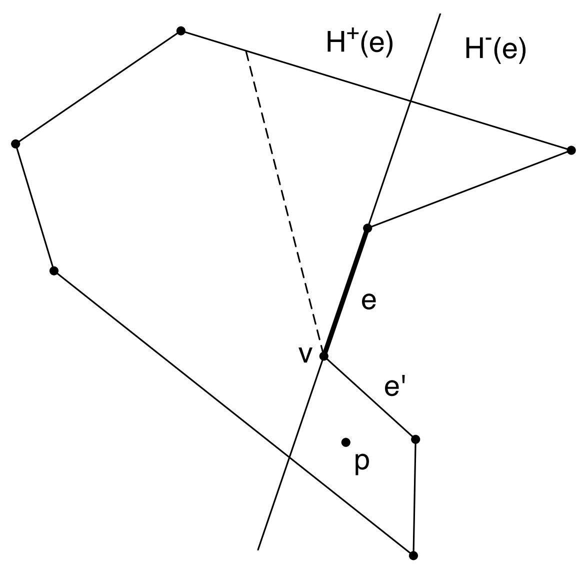


Anwendung Drehwinkel: 4.4 Kern eines Polygons

- Definition: Sternförmiges Polygon, es ex. $p \in P$ mit $\text{vis}_P(p) = P$
- Definition: Kern, $\text{ker}(P) := \{p \in P | \text{vis}_P(p) = P\}$
- Wichtiger Bereich, Berechnung in $O(n)$!

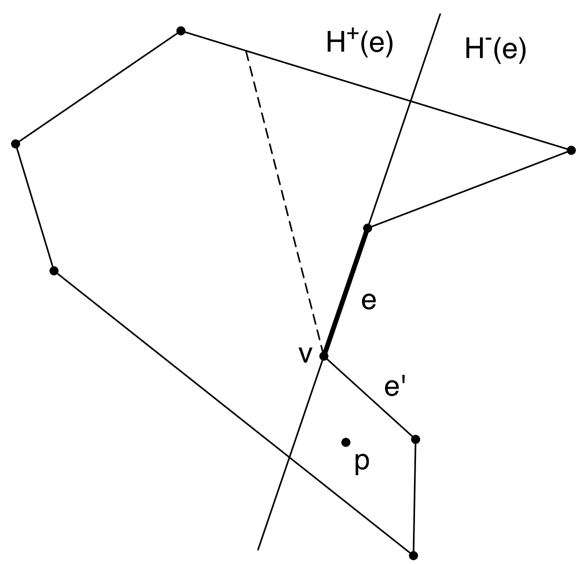


Struktur: Schnitt von Halbebenen



Struktur: Schnitt von Halbebenen

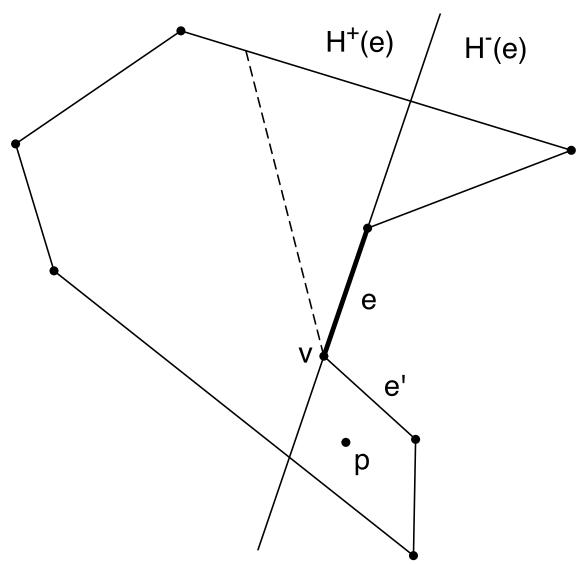
Jede Kante e definiert zwei Hablebenen $H^{-}(e)$ und $H^{+}(e)$



Struktur: Schnitt von Halbebenen

Jede Kante e definiert zwei Hablebenen $H^{-}(e)$ und $H^{+}(e)$

Lemma 4.22 $\text{ker}(P) = \bigcap_{\text{Kante } e \in P} H^{+}(e)$

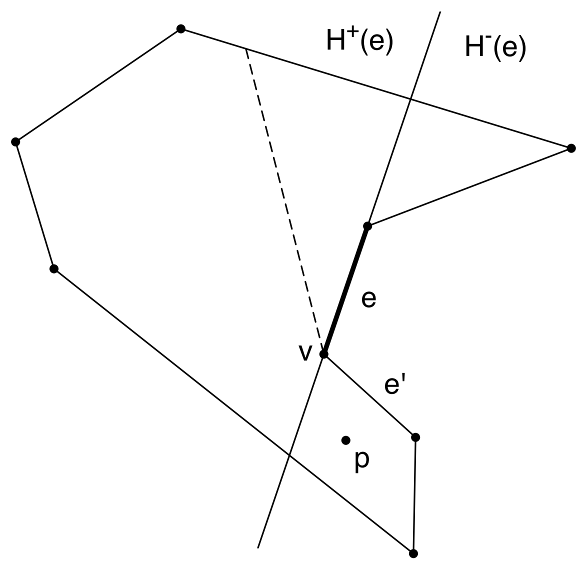


Struktur: Schnitt von Halbebenen

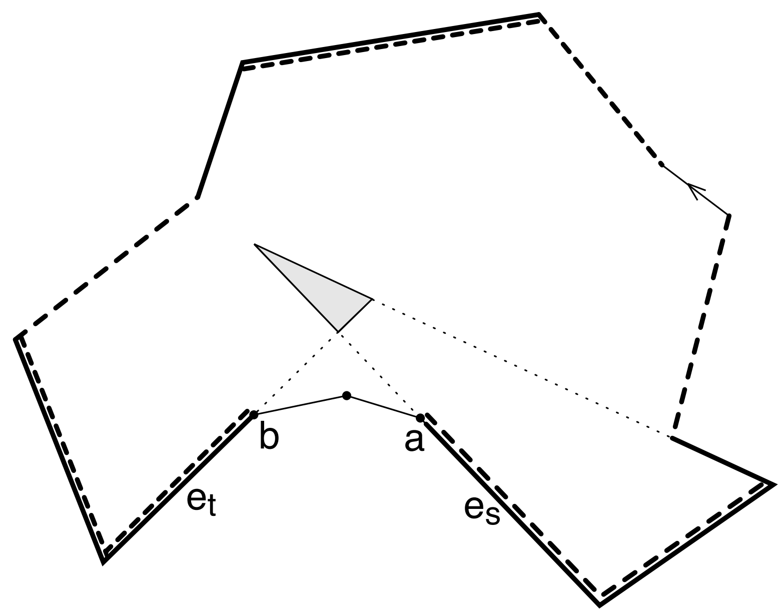
Jede Kante e definiert zwei Hablebenen $H^-(e)$ und $H^+(e)$

Lemma 4.22 $\ker(P) = \bigcap_{\text{Kante } e \in P} H^+(e)$

Beweis: Beidseitige Inklusion!

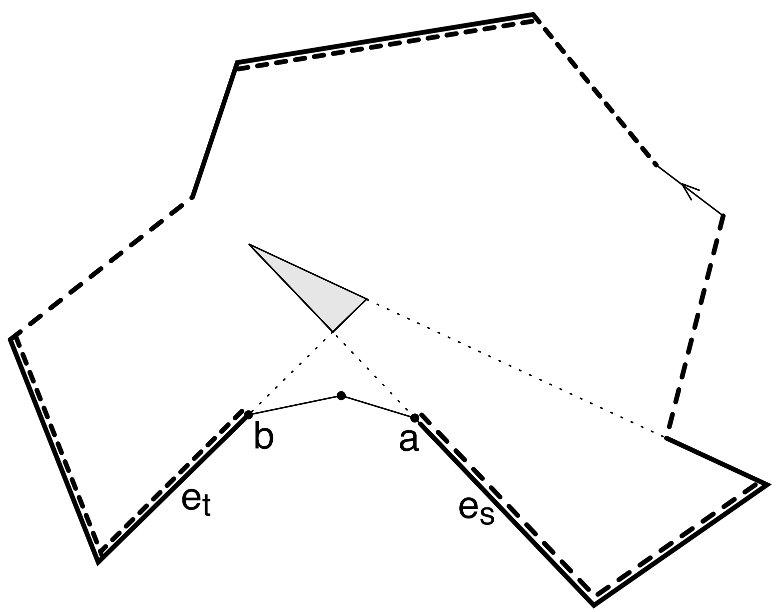


Schnitt von $H^+(e)$



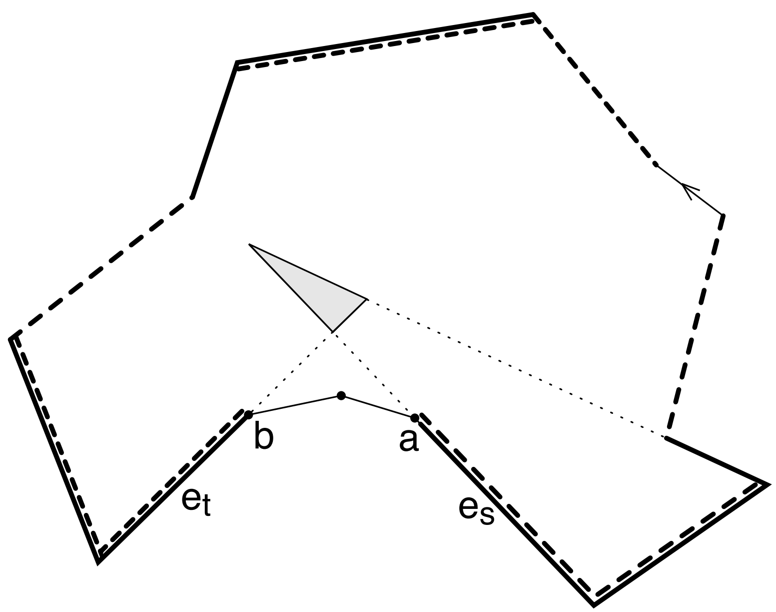
Schnitt von $H^+(e)$

- Schnitt von Halbebenen, $\Omega(n \log n)$, spezielle Halbebenen



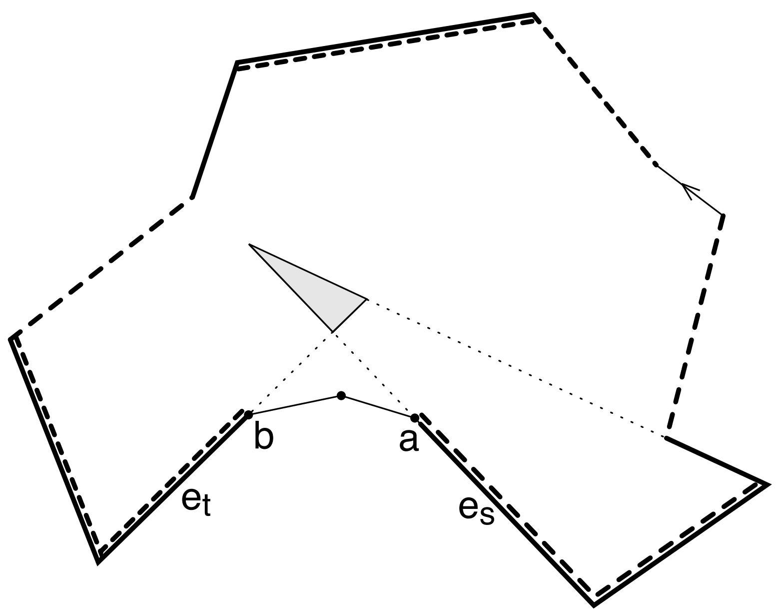
Schnitt von $H^+(e)$

- Schnitt von Halbebenen, $\Omega(n \log n)$, spezielle Halbebenen
- Nicht alle Halbebenen tragen zum Kern bei



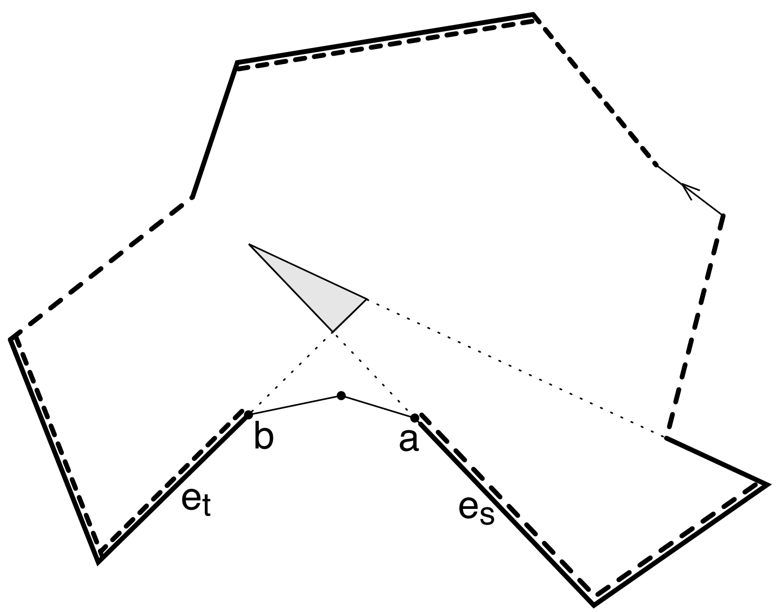
Schnitt von $H^+(e)$

- Schnitt von Halbebenen, $\Omega(n \log n)$, spezielle Halbebenen
- Nicht alle Halbebenen tragen zum Kern bei
- Definition: *Wesentliche* Halbebenen $H^+(e)$

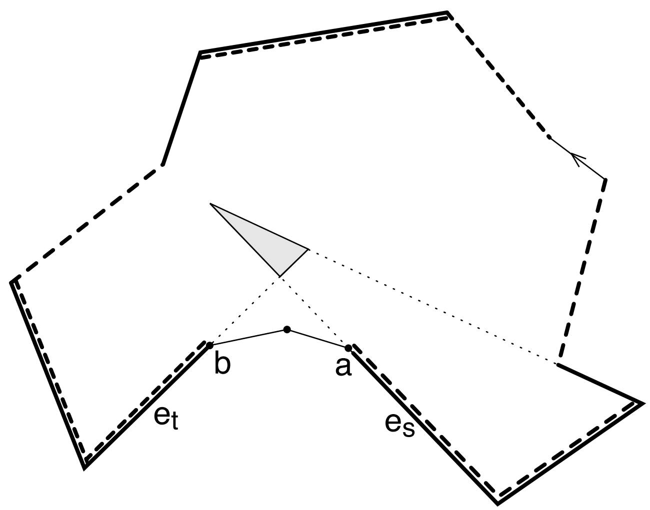


Schnitt von $H^+(e)$

- Schnitt von Halbebenen, $\Omega(n \log n)$, spezielle Halbebenen
- Nicht alle Halbebenen tragen zum Kern bei
- Definition: *Wesentliche* Halbebenen $H^+(e)$
- Über Drehwinkel beantworten

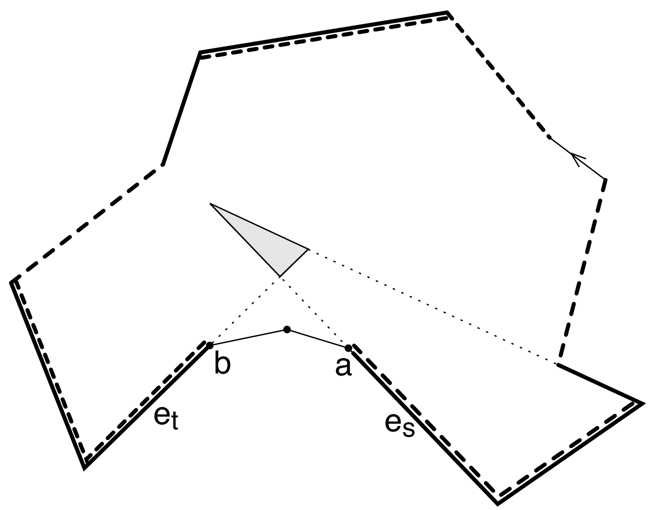


Drehwinkelfolgen



Drehwinkelfolgen

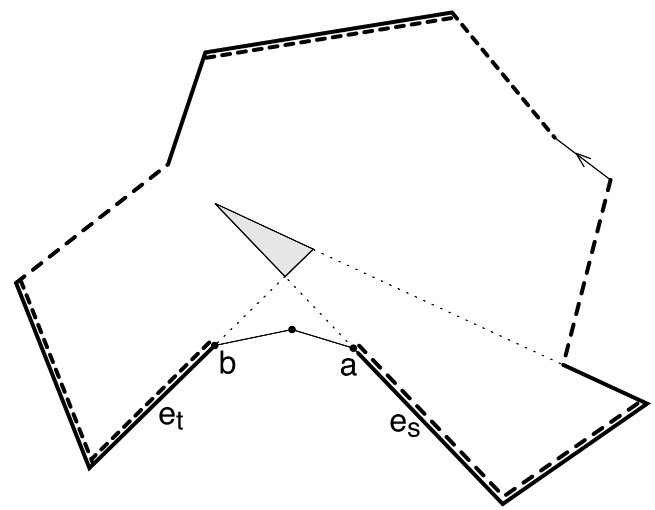
$$\alpha_{\max} := \max_{i \neq j} \alpha_{i,j} = \alpha_{s,t}$$



Drehwinkelfolgen

$$\alpha_{\max} := \max_{i \neq j} \alpha_{i,j} = \alpha_{s,t}$$

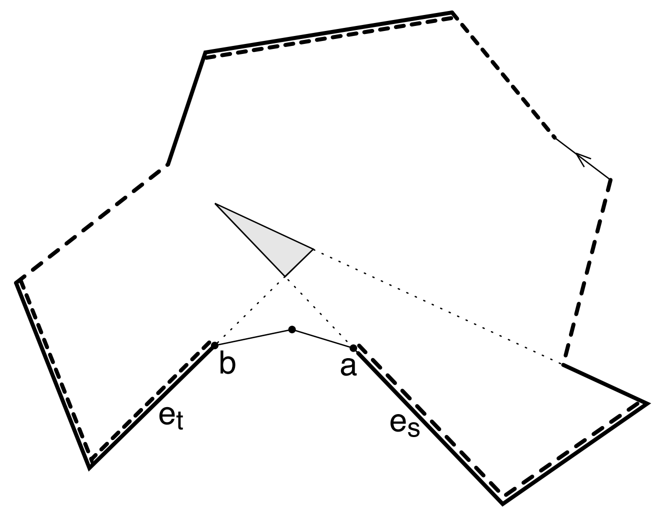
- Bezeichnung: $\alpha(e, f)$, Drehwinkel zwischen Kanten



Drehwinkelfolgen

$$\alpha_{\max} := \max_{i \neq j} \alpha_{i,j} = \alpha_{s,t}$$

- Bezeichnung: $\alpha(e, f)$, Drehwinkel zwischen Kanten
- $\alpha_{\max}$ zu groß, Kern leer



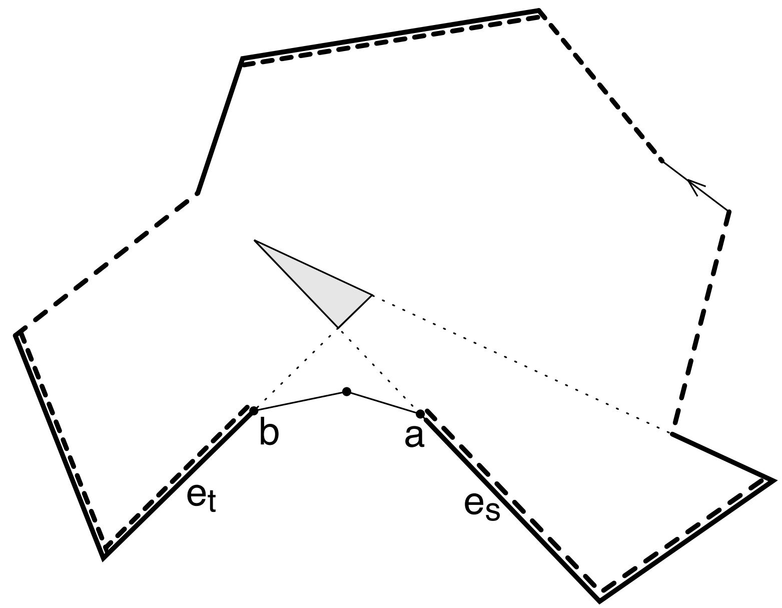
Leerer Kern?

Leerer Kern?

Lemma 4.23 Falls der maximale Drehwinkel $\alpha_{\max}$ von P größer gleich 3π ist, ist der Kern leer.

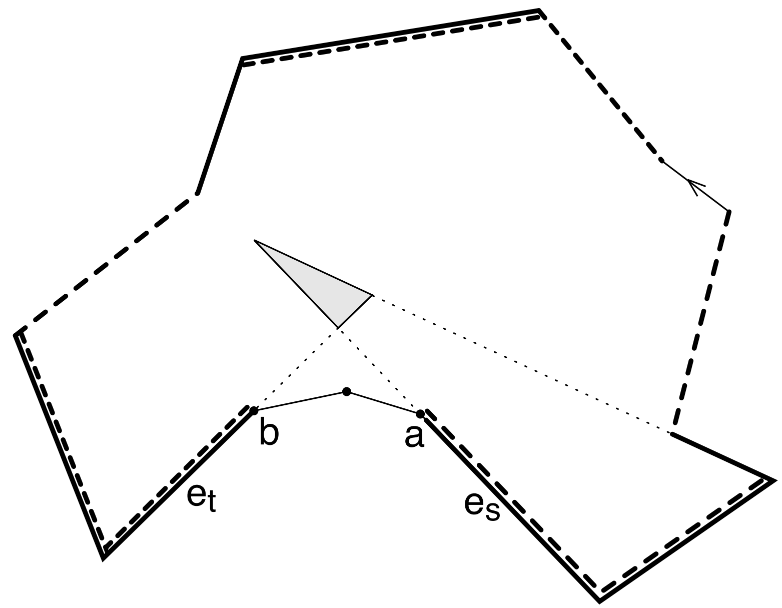
Leerer Kern?

Lemma 4.23 Falls der maximale Drehwinkel $\alpha_{\max}$ von P größer gleich 3π ist, ist der Kern leer.



Leerer Kern?

Lemma 4.23 Falls der maximale Drehwinkel $\alpha_{\max}$ von P größer gleich 3π ist, ist der Kern leer.



Beweis: Spezielle Kantenfolge existiert mit *üblen* Halbebenen!

Weitere Folgerung!

Weitere Folgerung!

Korollar 4.24 Sei der maximale Drehwinkel $\alpha_{\max}$ von P kleiner gleich 3π ist, dann gilt für je zwei Kanten e_i, e_j: $-\pi < \alpha(e_i, e_j)$.

Weitere Folgerung!

Korollar 4.24 Sei der maximale Drehwinkel $\alpha_{\max}$ von P kleiner gleich 3π ist, dann gilt für je zwei Kanten e_i, e_j: $-\pi < \alpha(e_i, e_j)$.

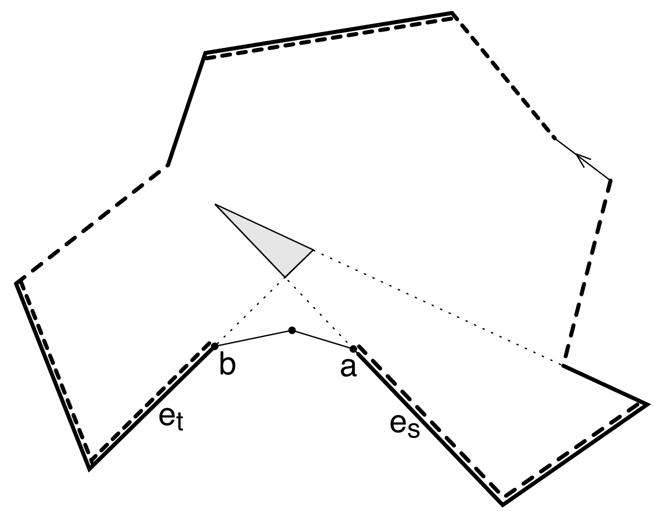
Beweis: Einfach!

Wichtige Teilfolgen auswählen, rekursiv

Aus maximaler Teilfolge: $e_s, e_{s+1}, \ldots, e_t$

$$f_0 \quad := e_s$$

$$f_{i+1} := \begin{cases} \text{erste Kante } e \text{ hinter } f_i \text{ mit } \alpha(f_i, e) > 0, \\ \quad \text{falls } f_i \text{ noch vor } e_t \text{ liegt}, \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

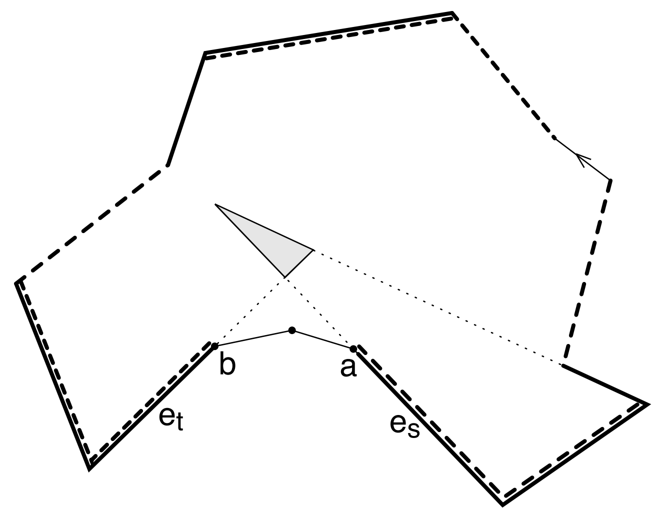


Wichtige Teilfolgen auswählen, rekursiv

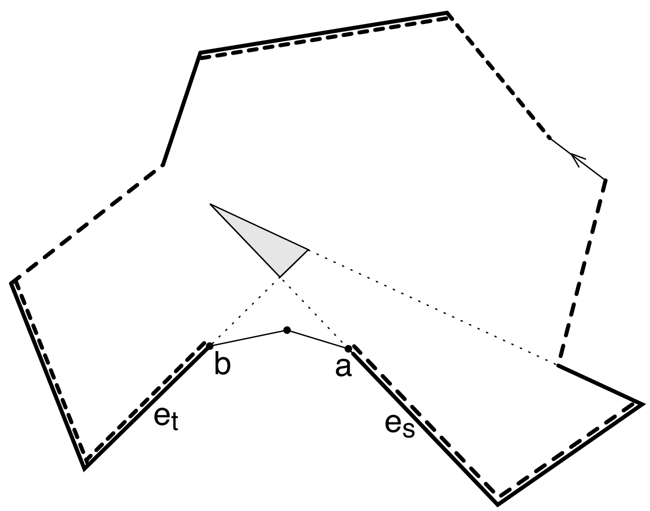
Aus maximaler Teilfolge: $e_s, e_{s+1}, \ldots, e_t$

$$b_0 \quad := e_t$$

$$b_{i+1} := \begin{cases} \text{letzte Kante } e \text{ vor } b_i \text{ mit } \alpha(e, b_i) > 0, \\ \quad \text{falls } b_i \text{ noch hinter } e_s \text{ liegt,} \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

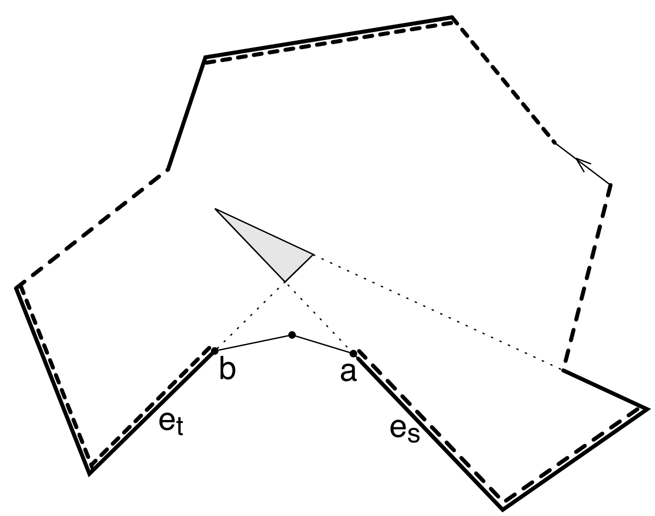


Wichtige Teilfolgen auswählen, rekursiv



Wichtige Teilfolgen auswählen, rekursiv

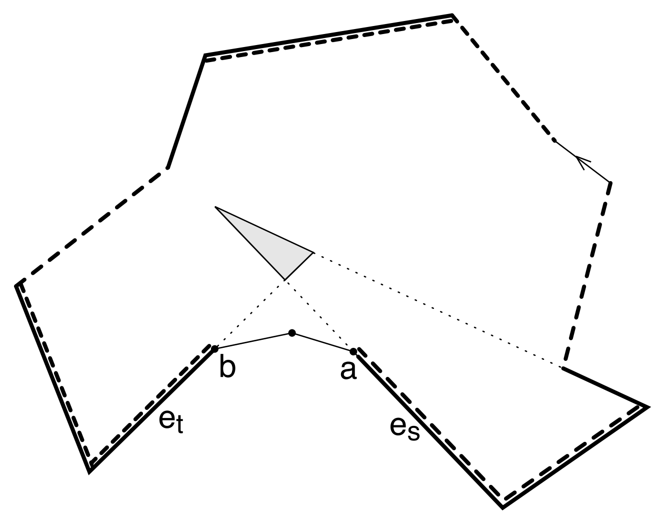
Theorem 4.25 Sei P ein einfaches Polygon mit maximalem Drehwinkel $< 3\pi$. Dann gehört jede für den Kern wesentliche Kante von P zur Folge F oder zur Folge B.



Wichtige Teilfolgen auswählen, rekursiv

Theorem 4.25 Sei P ein einfaches Polygon mit maximalem Drehwinkel $< 3\pi$. Dann gehört jede für den Kern wesentliche Kante von P zur Folge F oder zur Folge B.

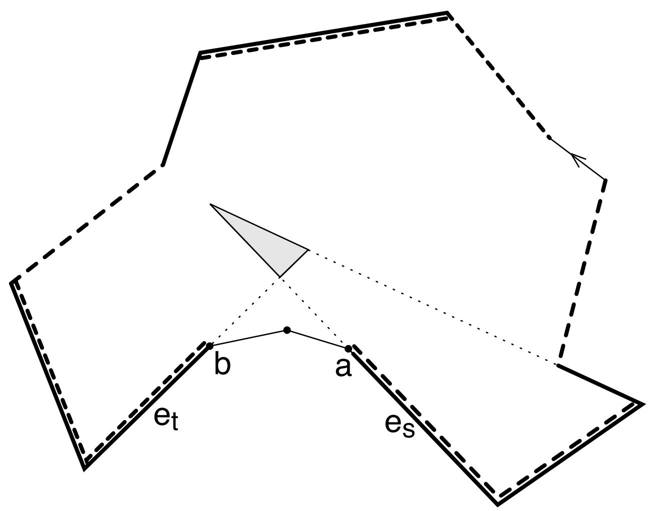
Beweis!



Wichtige Teilfolgen auswählen, rekursiv

Theorem 4.25 Sei P ein einfaches Polygon mit maximalem Drehwinkel $< 3\pi$. Dann gehört jede für den Kern wesentliche Kante von P zur Folge F oder zur Folge B.

Beweis! Vorteil?

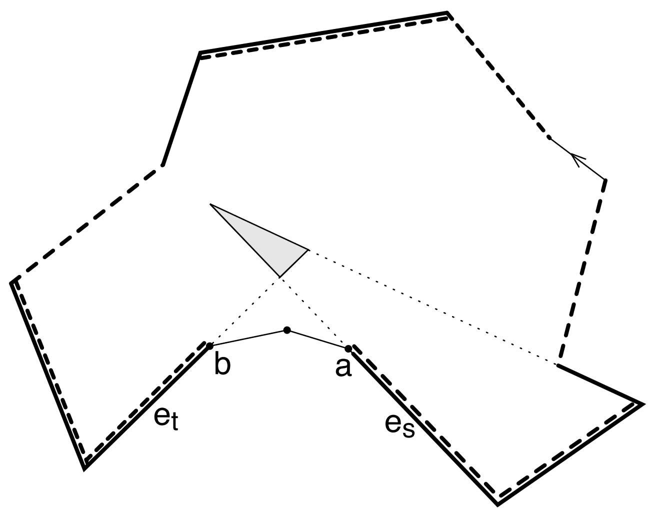


Wichtige Teilfolgen auswählen, rekursiv

Theorem 4.25 Sei P ein einfaches Polygon mit maximalem Drehwinkel $< 3\pi$. Dann gehört jede für den Kern wesentliche Kante von P zur Folge F oder zur Folge B.

Beweis! Vorteil?

Die Folgen B und F sind sortiert nach Steigungen!!



Ergebnisse sammeln: Kern in $O(n)$

Ergebnisse sammeln: Kern in $O(n)$

Theorem 4.26 Der Kern eines einfachen Polygones mit n Ecken kann in Zeit und Platz $O(n)$ berechnet werden.

Ergebnisse sammeln: Kern in $O(n)$

Theorem 4.26 Der Kern eines einfachen Polygones mit n Ecken kann in Zeit und Platz $O(n)$ berechnet werden.

Beweis:

Ergebnisse sammeln: Kern in $O(n)$

Theorem 4.26 Der Kern eines einfachen Polygones mit n Ecken kann in Zeit und Platz $O(n)$ berechnet werden.

Beweis:

- Maximale Teilfolge α_{max}: Sweep Maximum Subvektor $O(n)$

Ergebnisse sammeln: Kern in $O(n)$

Theorem 4.26 Der Kern eines einfachen Polygones mit n Ecken kann in Zeit und Platz $O(n)$ berechnet werden.

Beweis:

- Maximale Teilfolge α_{max}: Sweep Maximum Subvektor $O(n)$
- Daraus die Folgen F und B: Je $O(n)$

Ergebnisse sammeln: Kern in $O(n)$

Theorem 4.26 Der Kern eines einfachen Polygones mit n Ecken kann in Zeit und Platz $O(n)$ berechnet werden.

Beweis:

- Maximale Teilfolge α_{max}: Sweep Maximum Subvektor $O(n)$
- Daraus die Folgen F und B: Je $O(n)$
- Schnitt der Halbebenen der Folgen F und B, sortiert nach Steigung: Je $O(n)$

Ergebnisse sammeln: Kern in $O(n)$

Theorem 4.26 Der Kern eines einfachen Polygones mit n Ecken kann in Zeit und Platz $O(n)$ berechnet werden.

Beweis:

- Maximale Teilfolge α_{max}: Sweep Maximum Subvektor $O(n)$
- Daraus die Folgen F und B: Je $O(n)$
- Schnitt der Halbebenen der Folgen F und B, sortiert nach Steigung: Je $O(n)$
- Schnitt zweier konvexer Mengen: Untere/Obere Kontur X-monotoner Ketten in jeweils $O(n)$