

Voronoi Diagramme: Transformationen, Verallgemeinerungen

Elmar Langetepe
University of Bonn

Zusammenhang Delaunay 2D / Konvexe Hülle 3D

Zusammenhang Delaunay 2D/Konvexe Hülle 3D

- Reduktion von $DT(S)$ auf $ch(S')$ im \mathbb{R}^3

Zusammenhang Delaunay 2D/Konvexe Hülle 3D

- Reduktion von $DT(S)$ auf $ch(S')$ im \mathbb{R}^3
- Konvexe Hülle im \mathbb{R}^3 , Punktmenge S'

Zusammenhang Delaunay 2D/Konvexe Hülle 3D

- Reduktion von $DT(S)$ auf $ch(S')$ im \mathbb{R}^3
- Konvexe Hülle im \mathbb{R}^3 , Punktmenge S'
- Ergebnis: Konvexer Polyeder

Zusammenhang Delaunay 2D/Konvexe Hülle 3D

- Reduktion von $DT(S)$ auf $ch(S')$ im \mathbb{R}^3
- Konvexe Hülle im \mathbb{R}^3 , Punktmenge S'
- Ergebnis: Konvexer Polyeder
- Keine vier Punkte in einer Ebene: Dreiecksflächen

Zusammenhang Delaunay 2D/Konvexe Hülle 3D

- Reduktion von $DT(S)$ auf $ch(S')$ im \mathbb{R}^3
- Konvexe Hülle im \mathbb{R}^3 , Punktmenge S'
- Ergebnis: Konvexer Polyeder
- Keine vier Punkte in einer Ebene: Dreiecksflächen
- Berechnungsverfahren: Randomisierte inkrementelle Konstruktion

Zusammenhang Delaunay 2D/Konvexe Hülle 3D

- Reduktion von $DT(S)$ auf $ch(S')$ im \mathbb{R}^3
- Konvexe Hülle im \mathbb{R}^3 , Punktmenge S'
- Ergebnis: Konvexer Polyeder
- Keine vier Punkte in einer Ebene: Dreiecksflächen
- Berechnungsverfahren: Randomisierte inkrementelle Konstruktion
- Analog zum 2-dimensionalen Verfahren:

Zusammenhang Delaunay 2D/Konvexe Hülle 3D

- Reduktion von $DT(S)$ auf $ch(S')$ im \mathbb{R}^3
- Konvexe Hülle im \mathbb{R}^3 , Punktmenge S'
- Ergebnis: Konvexer Polyeder
- Keine vier Punkte in einer Ebene: Dreiecksflächen
- Berechnungsverfahren: Randomisierte inkrementelle Konstruktion
- Analog zum 2-dimensionalen Verfahren:
Erwartete Laufzeit $O(n \log n)$

Projektion Punkte 2D nach 3D

Projektion Punkte 2D nach 3D

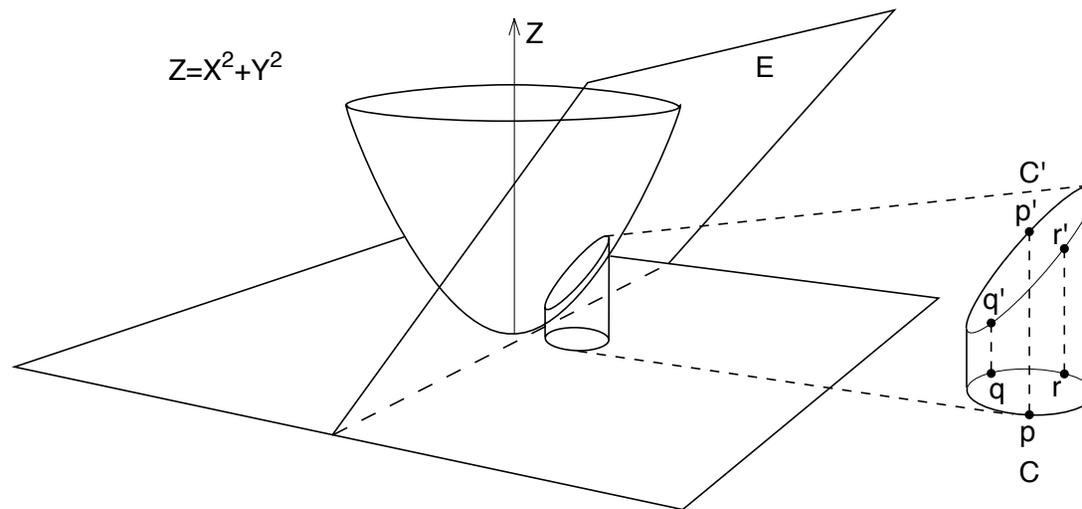
- Paraboloid im \mathbb{R}^3 : $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z\}$

Projektion Punkte 2D nach 3D

- Paraboloid im \mathbb{R}^3 : $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z\}$
- Rotation der Parabel $\{Y^2 = Z\}$ um die Z -Achse

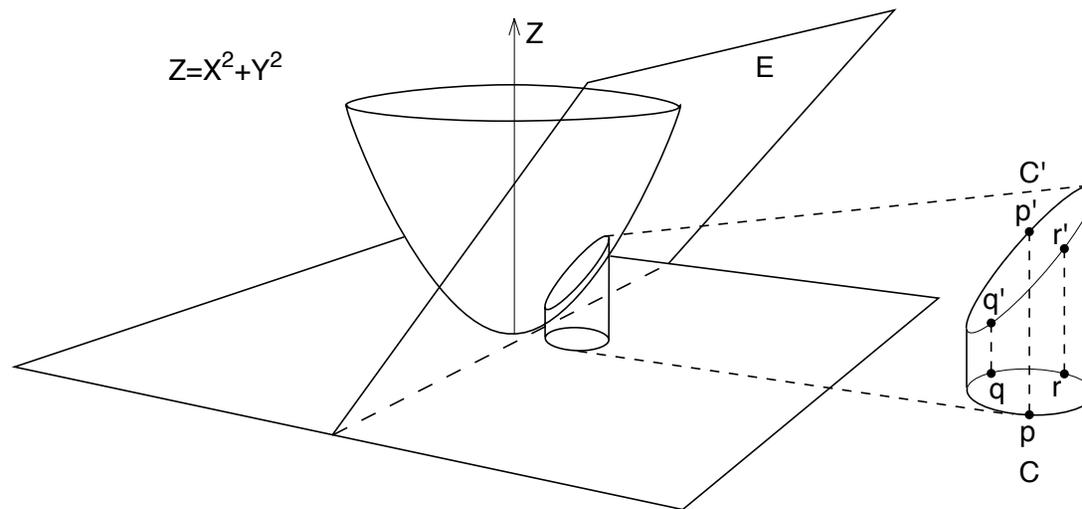
Projektion Punkte 2D nach 3D

- Paraboloid im \mathbb{R}^3 : $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z\}$
- Rotation der Parabel $\{Y^2 = Z\}$ um die Z -Achse
- Punkt $p = (x, y)$ projiziere $p' = (x, y, x^2 + y^2)$ auf P

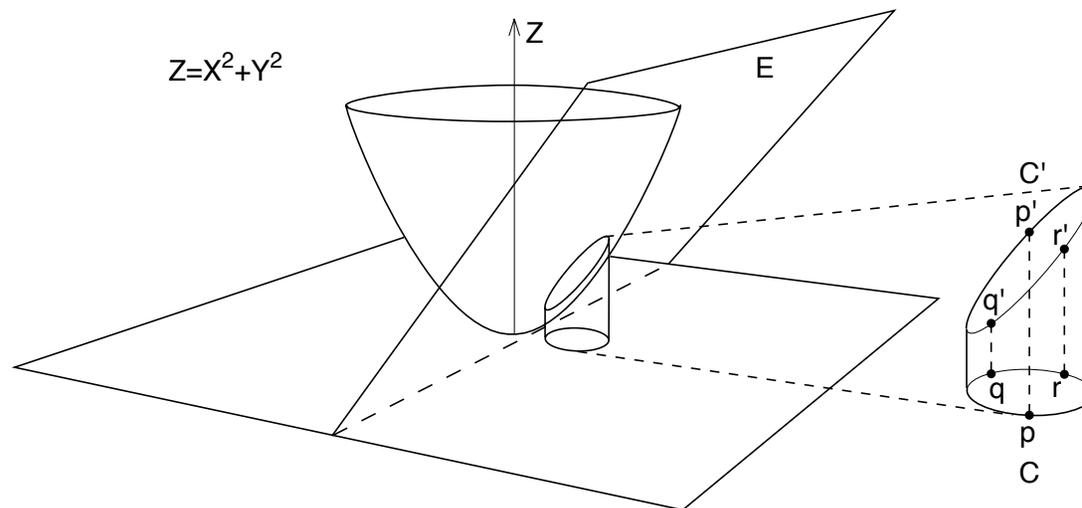


Projektion Punkte 2D nach 3D

- Paraboloid im \mathbb{R}^3 : $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z\}$
- Rotation der Parabel $\{Y^2 = Z\}$ um die Z -Achse
- Punkt $p = (x, y)$ projiziere $p' = (x, y, x^2 + y^2)$ auf P
- Auf Punktmenge S fortsetzen

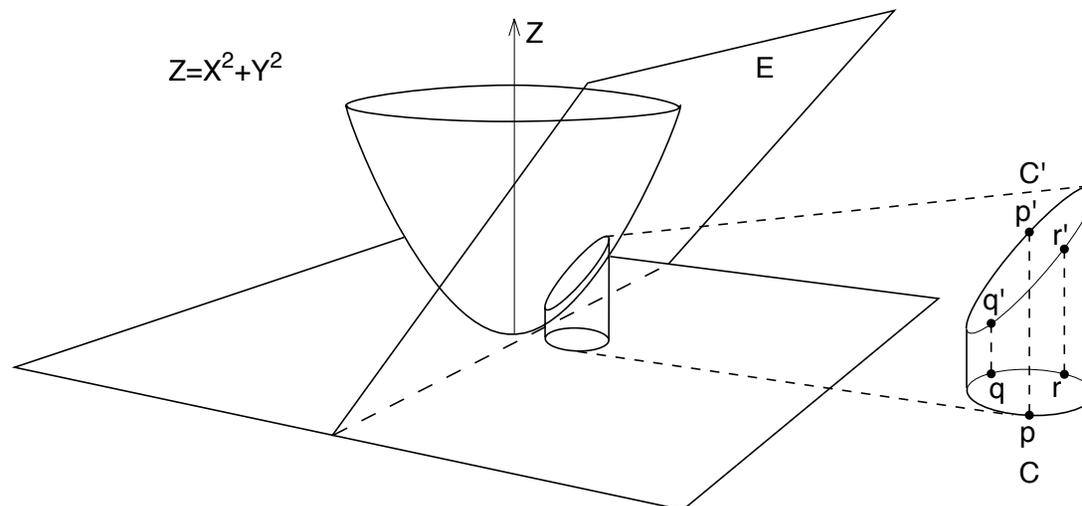


Kreisprojektion



Kreisprojektion

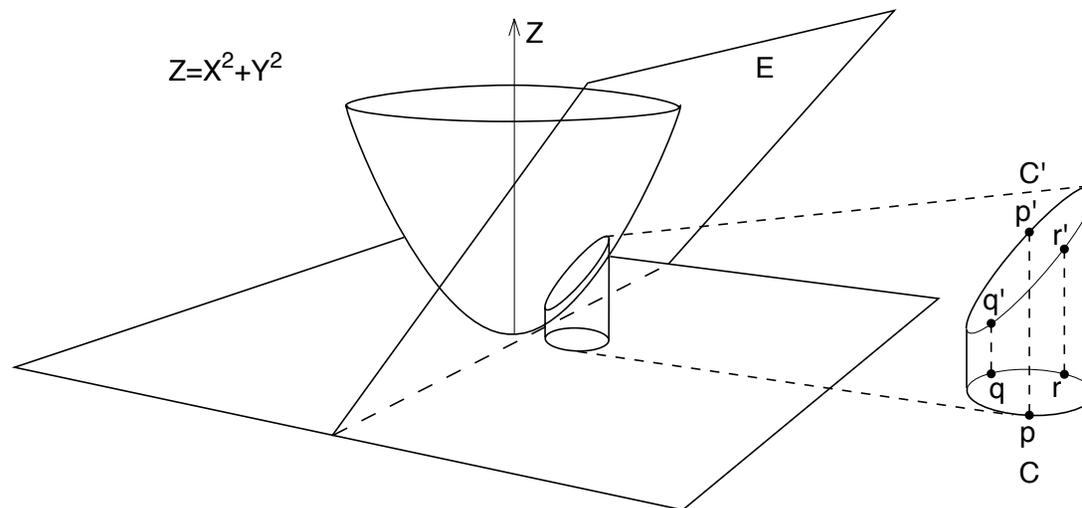
Lemma 6.17 Sei K der Rand eines Kreises in der XY -Ebene. Dann ist die geschlossene Kurve K' auf dem Paraboloid P in einer Ebene des \mathbb{R}^3 enthalten.



Kreisprojektion

Lemma 6.17 Sei K der Rand eines Kreises in der XY -Ebene. Dann ist die geschlossene Kurve K' auf dem Paraboloid P in einer Ebene des \mathbb{R}^3 enthalten.

Projektion des Kreises liegt in einer Ebene!

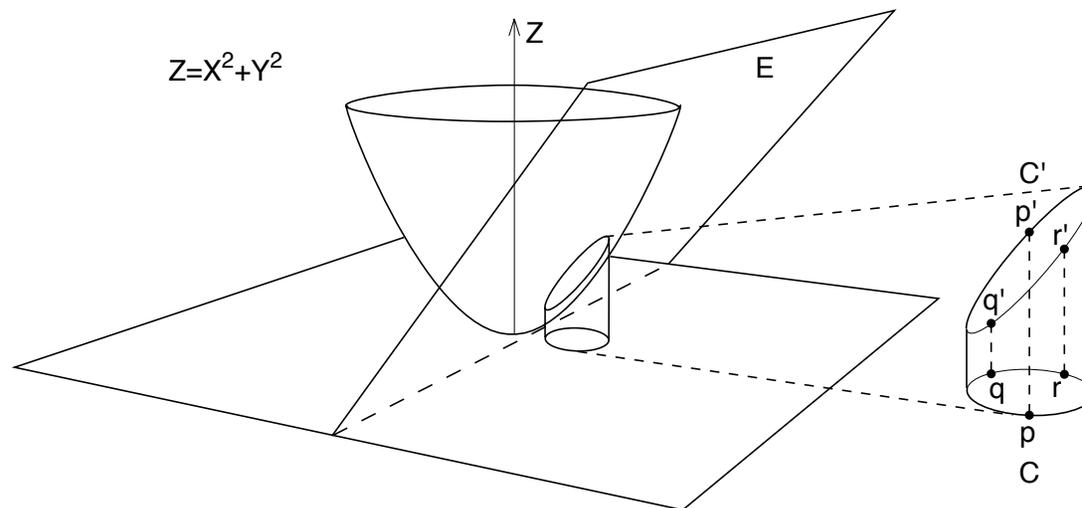


Kreisprojektion

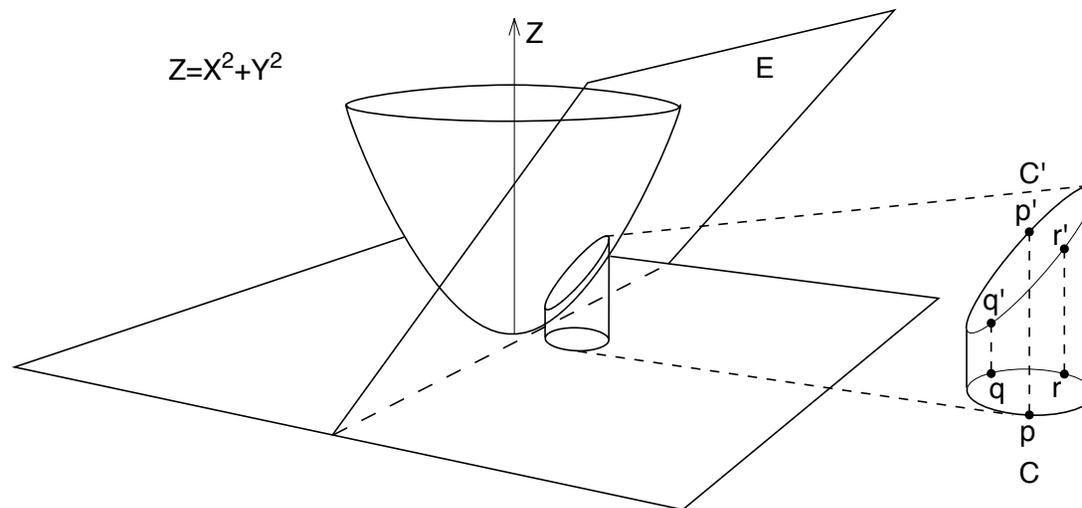
Lemma 6.17 Sei K der Rand eines Kreises in der XY -Ebene. Dann ist die geschlossene Kurve K' auf dem Paraboloid P in einer Ebene des \mathbb{R}^3 enthalten.

Projektion des Kreises liegt in einer Ebene!

Beweis: Direkte Manipulation!

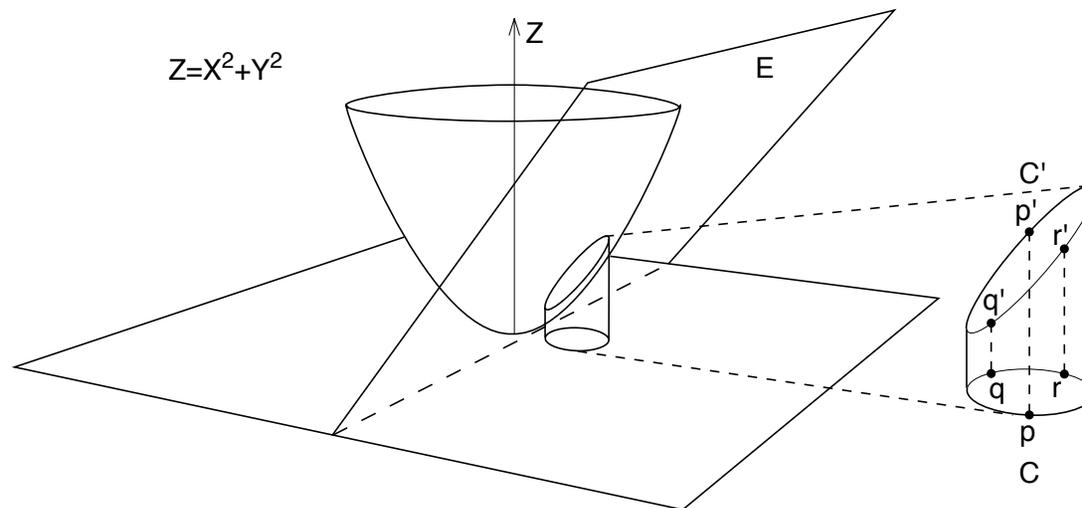


Konsequenz Delaunay Triangulation



Konsequenz Delaunay Triangulation

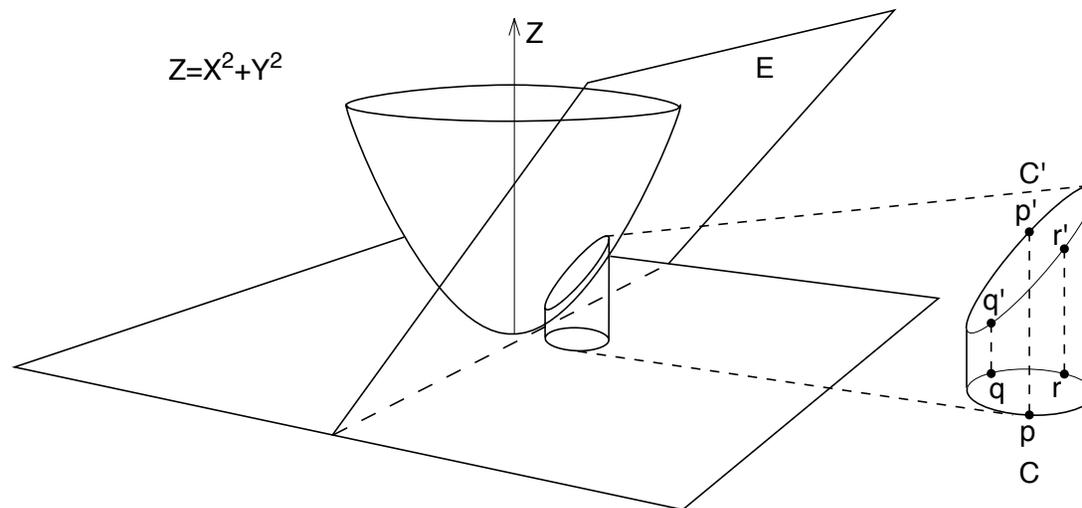
Theorem 6.18 Sei S eine endliche Punktmenge in der XY -Ebene. Dann ist die Delaunay-Triangulation von S gleich der Projektion der unteren konvexen Hülle von S' auf die XY -Ebene.



Konsequenz Delaunay Triangulation

Theorem 6.18 Sei S eine endliche Punktmenge in der XY -Ebene. Dann ist die Delaunay-Triangulation von S gleich der Projektion der unteren konvexen Hülle von S' auf die XY -Ebene.

Beweis: Zusammenhang *leerer* Delaunay-Kreis und Ebene auf konvexer Hülle



Voronoi Diagramm: Andere Metriken

Voronoi Diagramm: Andere Metriken

- Bislang Euklidische Metrik: $L_2(p, q) = \sqrt{|p_1 - q_1|^2 + |p_2 - q_2|^2}$

Voronoi Diagramm: Andere Metriken

- Bisläng Euklidische Metrik: $L_2(p, q) = \sqrt{|p_1 - q_1|^2 + |p_2 - q_2|^2}$
- Manhattan Metrik: $L_1(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$

Voronoi Diagramm: Andere Metriken

- Bislang Euklidische Metrik: $L_2(p, q) = \sqrt{|p_1 - q_1|^2 + |p_2 - q_2|^2}$
- Manhattan Metrik: $L_1(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$
- Maximum-Metrik: $L_\infty(p, q) = \max(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|)$

Voronoi Diagramm: Andere Metriken

- Bisläng Euklidische Metrik: $L_2(p, q) = \sqrt{|p_1 - q_1|^2 + |p_2 - q_2|^2}$
- Manhattan Metrik: $L_1(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$
- Maximum-Metrik: $L_\infty(p, q) = \max(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|)$
- Einheitskreise

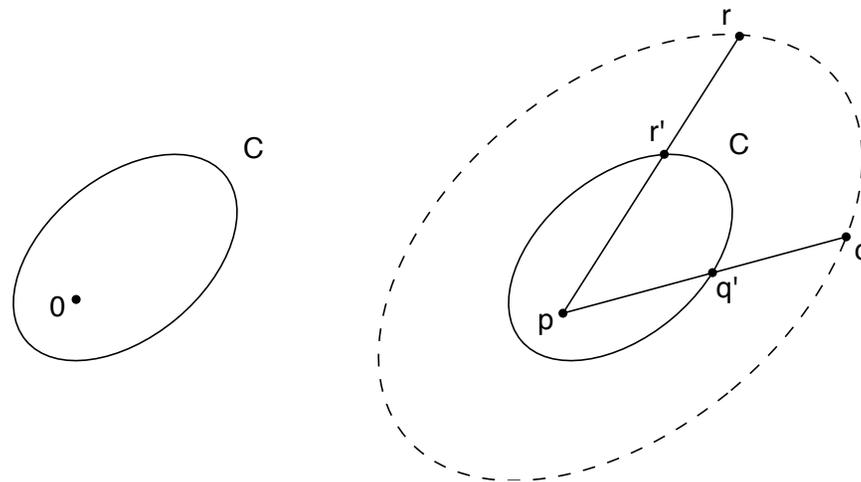
Voronoi Diagramm: Andere Metriken

- Bisläng Euklidische Metrik: $L_2(p, q) = \sqrt{|p_1 - q_1|^2 + |p_2 - q_2|^2}$
- Manhattan Metrik: $L_1(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$
- Maximum-Metrik: $L_\infty(p, q) = \max(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|)$
- Einheitskreise
- Konvexe Distanzfunktionen

Voronoi Diagramm: Andere Metriken

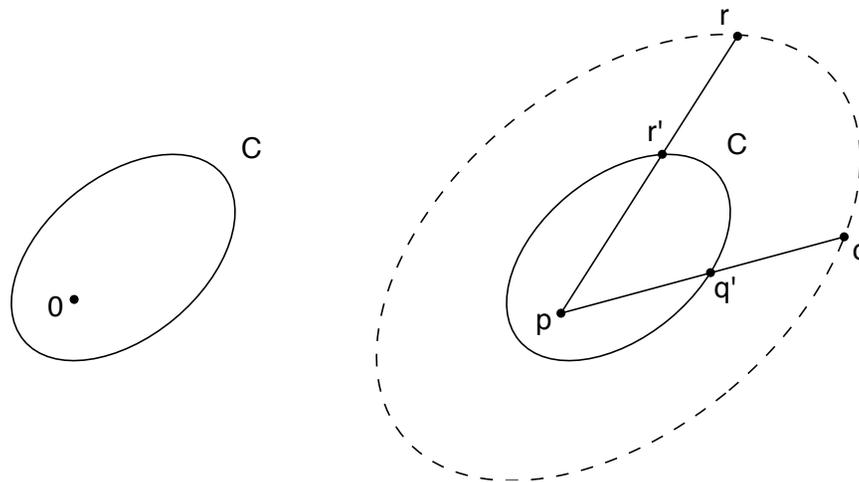
- Bisläng Euklidische Metrik: $L_2(p, q) = \sqrt{|p_1 - q_1|^2 + |p_2 - q_2|^2}$
- Manhattan Metrik: $L_1(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$
- Maximum-Metrik: $L_\infty(p, q) = \max(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|)$
- Einheitskreise
- Konvexe Distanzfunktionen
- Voronoi-Diagramme dafür

Definition: Konvexe Distanzfunktion



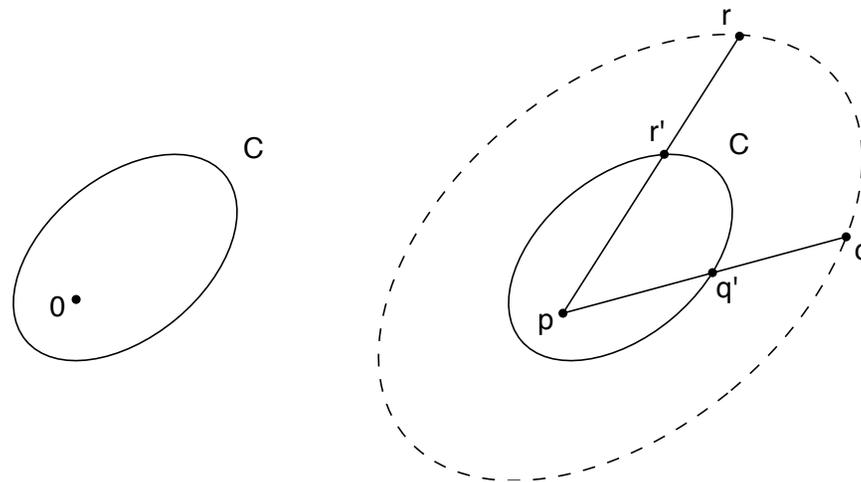
Definition: Konvexe Distanzfunktion

- *Einheitskreis* C kompakte, konvexe Menge im \mathbb{R}^2



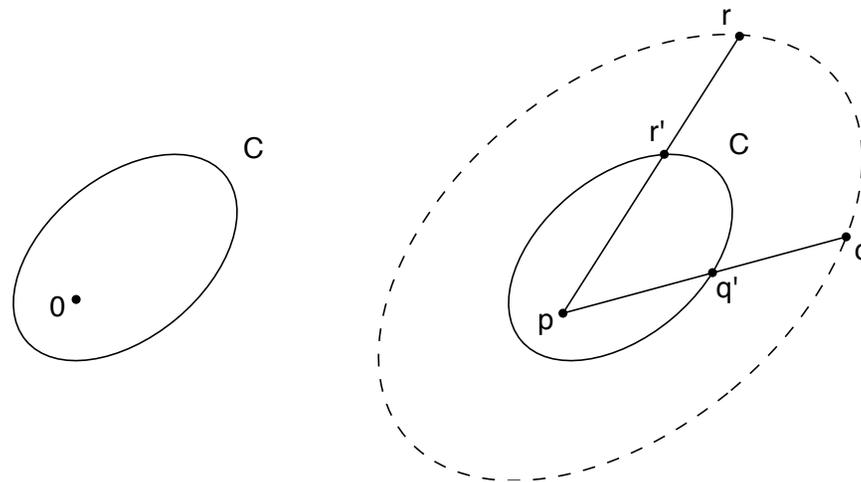
Definition: Konvexe Distanzfunktion

- *Einheitskreis* C kompakte, konvexe Menge im \mathbb{R}^2
- Nullpunkt in C enthalten



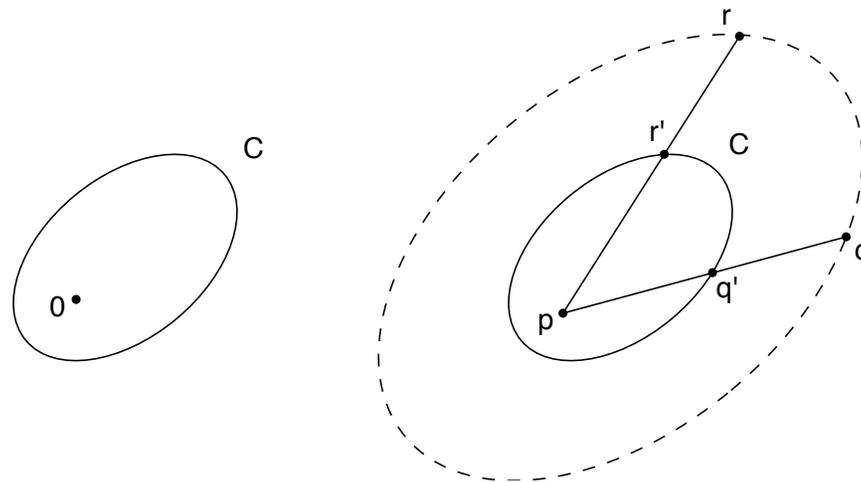
Definition: Konvexe Distanzfunktion

- *Einheitskreis* C kompakte, konvexe Menge im \mathbb{R}^2
- Nullpunkt in C enthalten
- Abstand von p nach q :



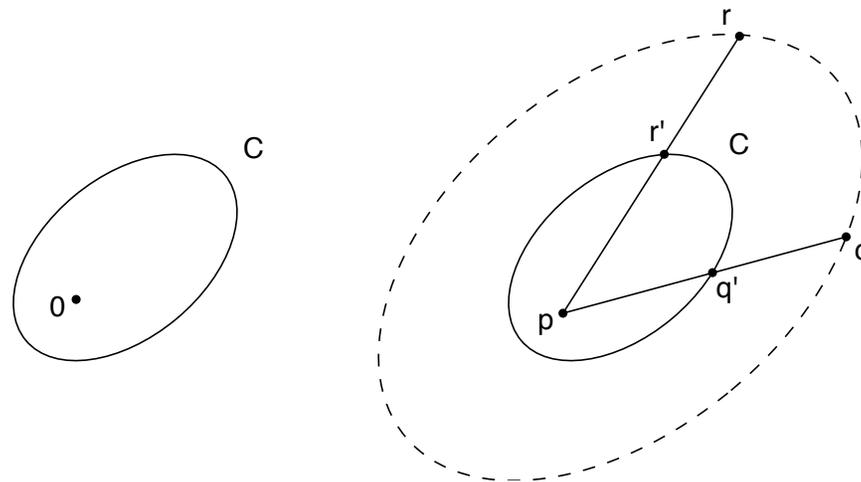
Definition: Konvexe Distanzfunktion

- *Einheitskreis* C kompakte, konvexe Menge im \mathbb{R}^2
- Nullpunkt in C enthalten
- Abstand von p nach q : C verschieben, Strahl von p durch q schneidet Rand von C bei q'



Definition: Konvexe Distanzfunktion

- *Einheitskreis* C kompakte, konvexe Menge im \mathbb{R}^2
- Nullpunkt in C enthalten
- Abstand von p nach q : C verschieben, Strahl von p durch q schneidet Rand von C bei q'
- $d_C(p, q) := \frac{|pq|}{|pq'|}$, Skalierungsfaktor für q



Konvexe Distanzfunktion

Konvexe Distanzfunktion

- $d_C(p, q) = 0$ gdw. $p = q$

Konvexe Distanzfunktion

- $d_C(p, q) = 0$ gdw. $p = q$
- Dreiecksungleichung gilt

Konvexe Distanzfunktion

- $d_C(p, q) = 0$ gdw. $p = q$
- Dreiecksungleichung gilt
- Symmetrie $d_C(p, q) = d_C(q, p)$ falls C symmetrisch bezgl. $(0, 0)$

Konvexe Distanzfunktion

- $d_C(p, q) = 0$ gdw. $p = q$
- Dreiecksungleichung gilt
- Symmetrie $d_C(p, q) = d_C(q, p)$ falls C symmetrisch bezgl. $(0, 0)$
- Einheitskreis: $\{x \in \mathbb{R}^2; d_C(0, x) \leq 1\}$

Konvexe Distanzfunktion

- $d_C(p, q) = 0$ gdw. $p = q$
- Dreiecksungleichung gilt
- Symmetrie $d_C(p, q) = d_C(q, p)$ falls C symmetrisch bezgl. $(0, 0)$
- Einheitskreis: $\{x \in \mathbb{R}^2; d_C(0, x) \leq 1\}$
- Einheitskreise: L_1 und L_∞

Konvexe Distanzfunktion

- $d_C(p, q) = 0$ gdw. $p = q$
- Dreiecksungleichung gilt
- Symmetrie $d_C(p, q) = d_C(q, p)$ falls C symmetrisch bezgl. $(0, 0)$
- Einheitskreis: $\{x \in \mathbb{R}^2; d_C(0, x) \leq 1\}$
- Einheitskreise: L_1 und L_∞
- Konvexe Distanzfunktionen

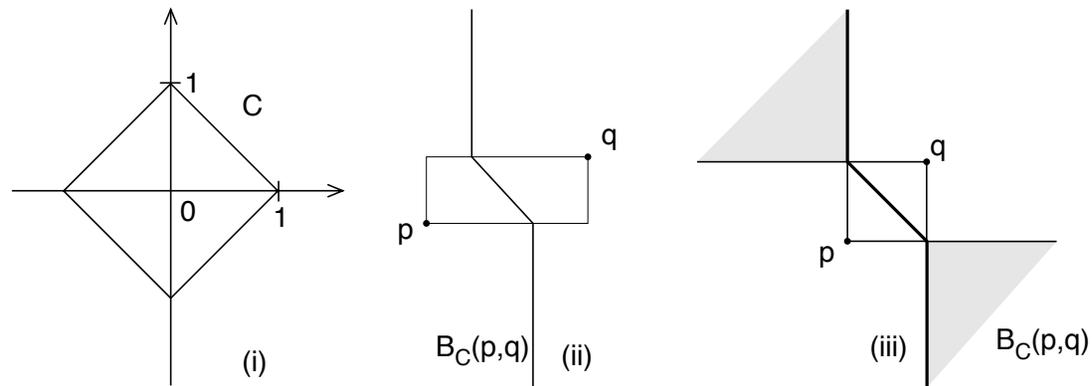
Konvexe Distanzfunktion

- $d_C(p, q) = 0$ gdw. $p = q$
- Dreiecksungleichung gilt
- Symmetrie $d_C(p, q) = d_C(q, p)$ falls C symmetrisch bezgl. $(0, 0)$
- Einheitskreis: $\{x \in \mathbb{R}^2; d_C(0, x) \leq 1\}$
- Einheitskreise: L_1 und L_∞
- Konvexe Distanzfunktionen
- Nicht streng konvex!

Konvexe Distanzfunktion

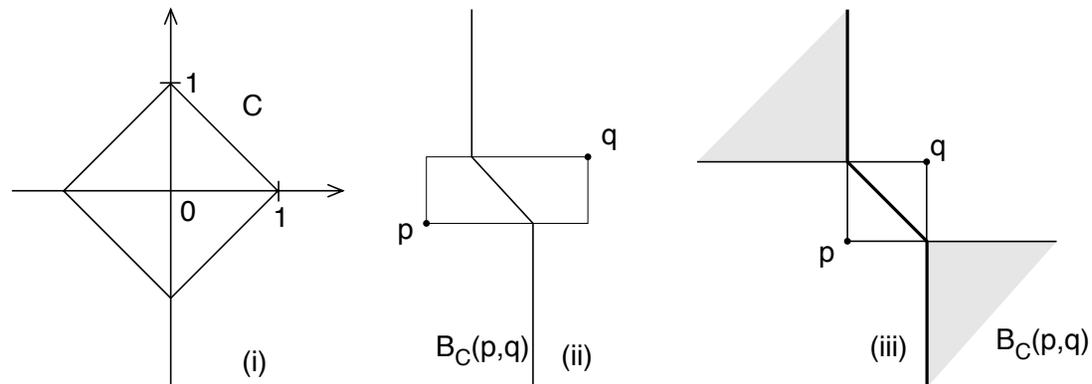
- $d_C(p, q) = 0$ gdw. $p = q$
- Dreiecksungleichung gilt
- Symmetrie $d_C(p, q) = d_C(q, p)$ falls C symmetrisch bezgl. $(0, 0)$
- Einheitskreis: $\{x \in \mathbb{R}^2; d_C(0, x) \leq 1\}$
- Einheitskreise: L_1 und L_∞
- Konvexe Distanzfunktionen
- Nicht streng konvex!
- Voronoi-Diagramm, Bisektoren, Voronoi-Regionen

Konvexe Distanzfunktion: Bisektoren



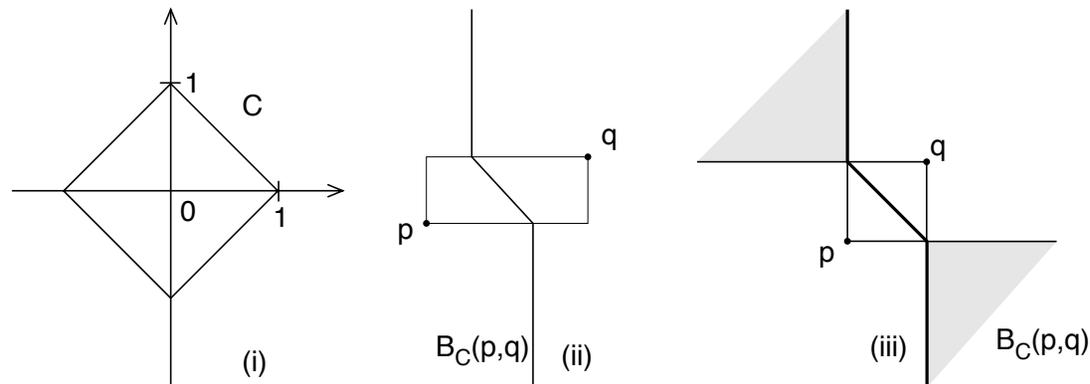
Konvexe Distanzfunktion: Bisektoren

- Beispiel L_1



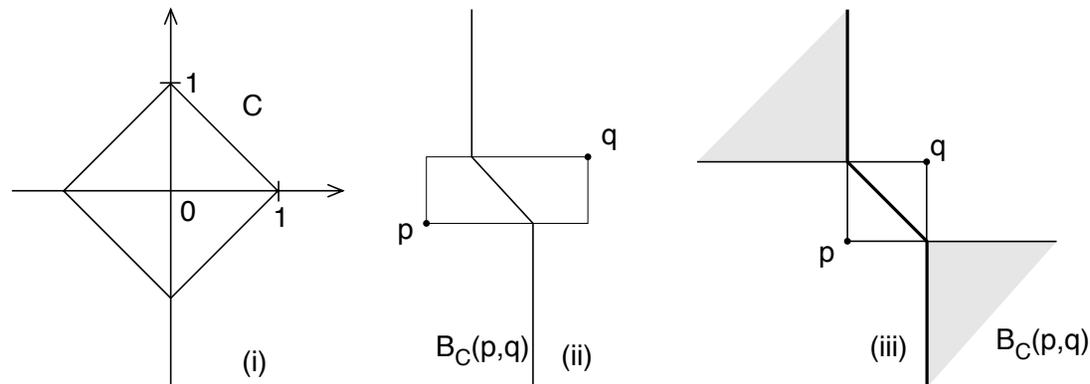
Konvexe Distanzfunktion: Bisektoren

- Beispiel L_1
- Flächige Bisektoren, falls p, q auf Ecken eines Quadrates liegen



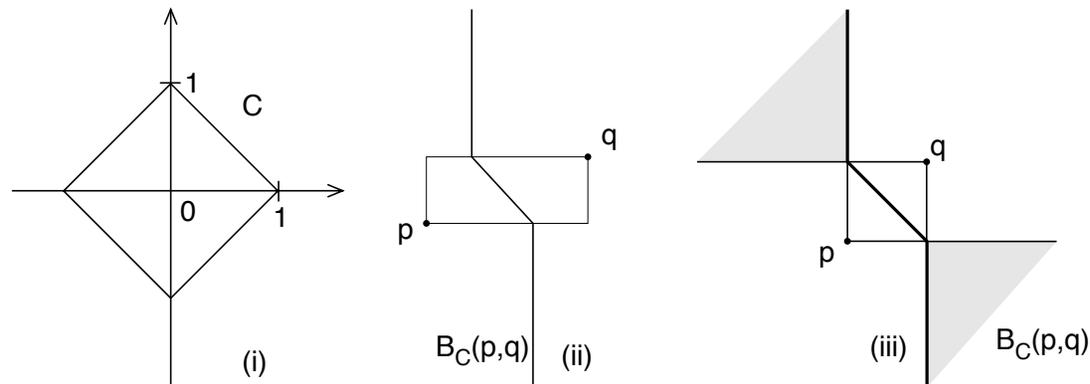
Konvexe Distanzfunktion: Bisektoren

- Beispiel L_1
- Flächige Bisektoren, falls p, q auf Ecken eines Quadrates liegen
- Abhilfe: Als Rechteck interpretieren



Konvexe Distanzfunktion: Bisektoren

- Beispiel L_1
- Flächige Bisektoren, falls p, q auf Ecken eines Quadrates liegen
- Abhilfe: Als Rechteck interpretieren
- Senkrechte Elemente sind Bisektor, Flächen verteilen



Konvexe Distanzfunktionen: Bisektorbestimmung

Konvexe Distanzfunktionen: Bisektorbestimmung

- Bisektor zwischen p und q

Konvexe Distanzfunktionen: Bisektorbestimmung

- Bisektor zwischen p und q
- Kopien der Einheitskreise

Konvexe Distanzfunktionen: Bisektorbestimmung

- Bisektor zwischen p und q
- Kopien der Einheitskreise
- Wachsen lassen, Schnittpunkte beschreiben Bisektor

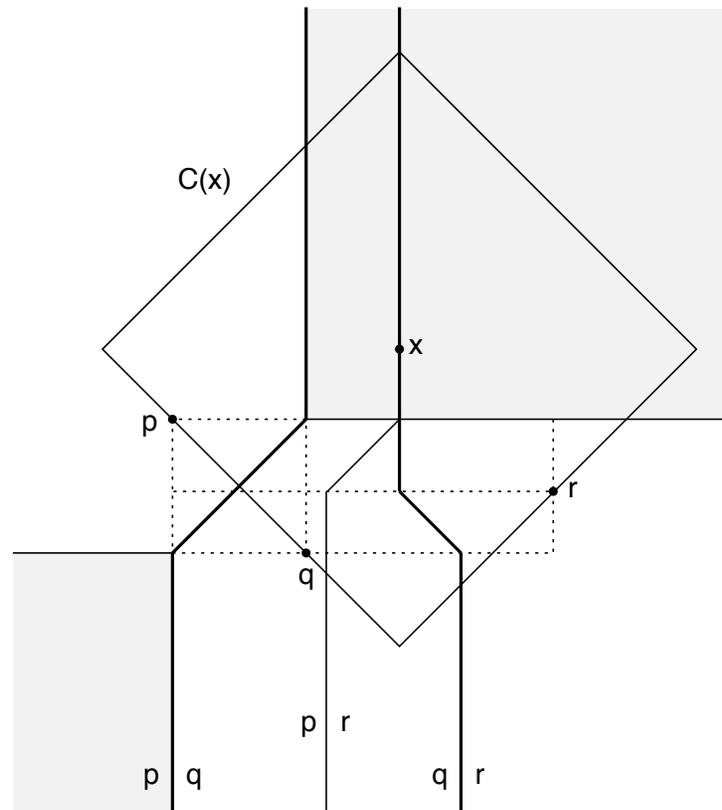
Konvexe Distanzfunktionen: Bisektorbestimmung

- Bisektor zwischen p und q
- Kopien der Einheitskreise
- Wachsen lassen, Schnittpunkte beschreiben Bisektor
- Streng konvex, keine Flächen

Konvexe Distanzfunktionen: Bisektorbestimmung

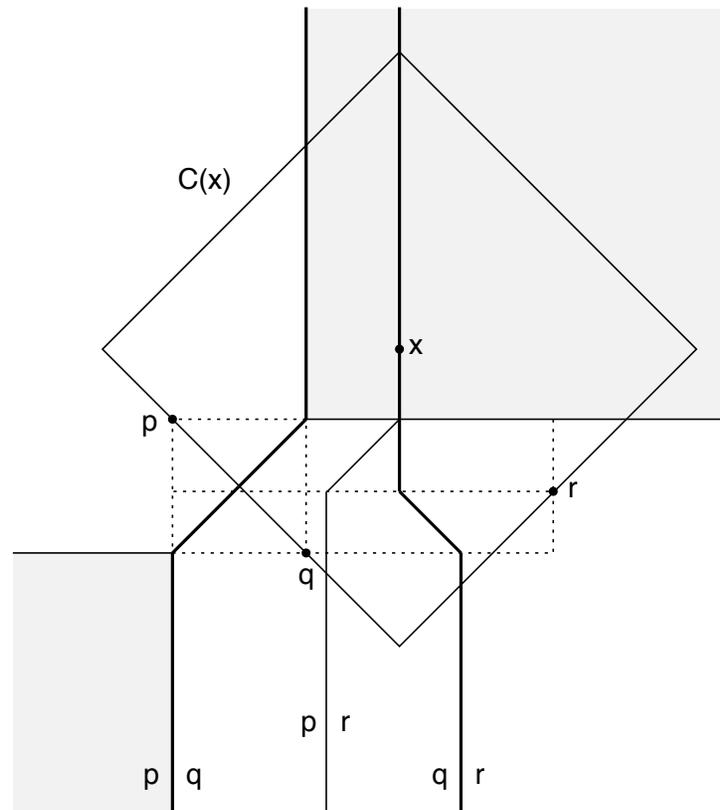
- Bisektor zwischen p und q
- Kopien der Einheitskreise
- Wachsen lassen, Schnittpunkte beschreiben Bisektor
- Streng konvex, keine Flächen
- Beispiele: Applet

Konvexe Distanzfunktionen: Unterschiede



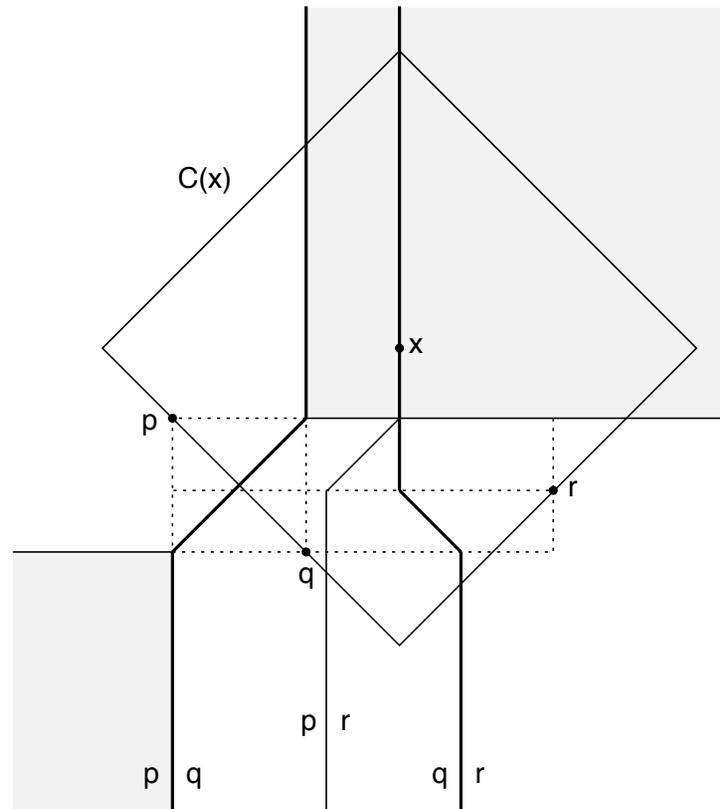
Konvexe Distanzfunktionen: Unterschiede

Drei Punkte auf dem Rand eines leeren L_1 -Kreises. Zentrum bildet keinen Voronoi Knoten.



Konvexe Distanzfunktionen: Unterschiede

Drei Punkte auf dem Rand eines leeren L_1 -Kreises. Zentrum bildet keinen Voronoi Knoten. Beispiel!



Konvexe Distanzfunktionen: Gemeinsamkeiten

Konvexe Distanzfunktionen: Gemeinsamkeiten

Lemma 5.20 Sei d_C eine konvexe Distanzfunktion. Dann ist jede Voronoi-Region $VR_C(p, S)$ sternförmig und enthält p im Kern.

Konvexe Distanzfunktionen: Gemeinsamkeiten

Lemma 5.20 Sei d_C eine konvexe Distanzfunktion. Dann ist jede Voronoi-Region $VR_C(p, S)$ sternförmig und enthält p im Kern.

Beweis: Widerspruch! Wie bisher!!

Konvexe Distanzfunktionen: Gemeinsamkeiten

Lemma 5.20 Sei d_C eine konvexe Distanzfunktion. Dann ist jede Voronoi-Region $VR_C(p, S)$ sternförmig und enthält p im Kern.

Beweis: Widerspruch! Wie bisher!!

Korollar 5.21 Jede Voronoi-Region bezüglich einer konvexen Distanzfunktion ist zusammenhängend.