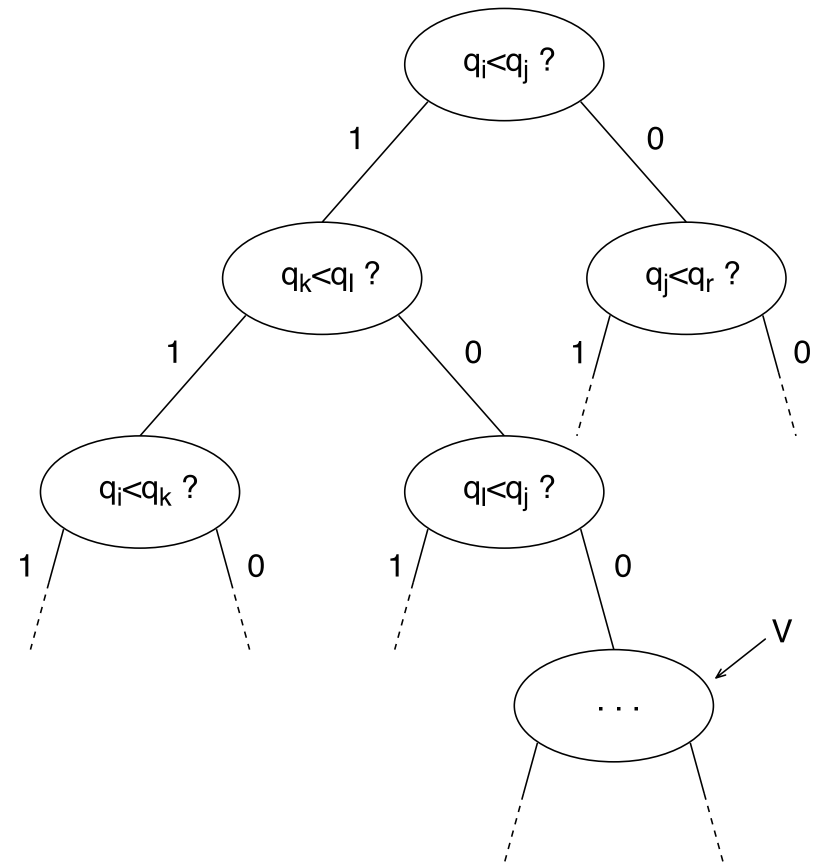
Untere Schranken

Elmar Langetepe
University of Bonn

Sortieren mit Schlüsselvergleichen

Theorem 1.4 Sortieren durch Schlüsselvergleiche hat die Zeitkomplexität $\Omega(n \log n)$.

Entscheidungsbaum!



Operationen $K(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q_i < q_j \\ 0 & \text{falls } q_i > q_j \end{cases}$

Lineares Modell, Elementtest

Lineares Modell, Elementtest

- Tests der Form: $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + d < 0$?

Lineares Modell, Elementtest

- Tests der Form: $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + d < 0$?
- Lineare Funktion h auswerten, 1 Schritt!

Lineares Modell, Elementtest

- Tests der Form: $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + d < 0?$
- Lineare Funktion h auswerten, 1 Schritt!
- Vergleiche: $c_i = 1$,$c_j = -1$, $h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

Lineares Modell, Elementtest

- Tests der Form: $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + d < 0?$
- Lineare Funktion h auswerten, 1 Schritt!
- Vergleiche: $c_i = 1$,$c_j = -1$, $h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$
- Funktion beschreibt (Hyper-)Ebene im $\mathbb{R}^n$

Lineares Modell, Elementtest

- Tests der Form: $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + d < 0$?
- Lineare Funktion h auswerten, 1 Schritt!
- Vergleiche: $c_i = 1$,$c_j = -1$, $h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$
- Funktion beschreibt (Hyper-)Ebene im $\mathbb{R}^n$
- Untere Schranke für Elementtest: $W \subseteq \mathbb{R}^n$

Lineares Modell, Elementtest

- Tests der Form: $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + d < 0$?
- Lineare Funktion h auswerten, 1 Schritt!
- Vergleiche: $c_i = 1$,$c_j = -1$, $h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$
- Funktion beschreibt (Hyper-)Ebene im $\mathbb{R}^n$
- Untere Schranke für Elementtest: $W \subseteq \mathbb{R}^n$
- Entscheidungsproblem: Liegt $x \in W$?

Lineares Modell, Elementtest

- Tests der Form: $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + d < 0?$
- Lineare Funktion h auswerten, 1 Schritt!
- Vergleiche: $c_i = 1$,$c_j = -1$, $h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$
- Funktion beschreibt (Hyper-)Ebene im $\mathbb{R}^n$
- Untere Schranke für Elementtest: $W \subseteq \mathbb{R}^n$
- Entscheidungsproblem: Liegt $x \in W$?
- Kleiner Exkurs: Zusammenhangskomponenten

Allgemeinere untere Schranke

Allgemeinere untere Schranke

Theorem 1.5 Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge mit m Zusammenhangskomponenten. Dann benötigt jeder Algorithmus für den Elementtest von W mindestens $\log m$ viele Schritte.

Allgemeinere untere Schranke

Theorem 1.5 Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge mit m Zusammenhangskomponenten. Dann benötigt jeder Algorithmus für den Elementtest von W mindestens $\log m$ viele Schritte.

Beispiele: Binäres Suchen, m disjunkte Intervalle!
Sortieren, Permutation finden!

Allgemeinere untere Schranke

Theorem 1.5 Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge mit m Zusammenhangskomponenten. Dann benötigt jeder Algorithmus für den Elementtest von W mindestens $\log m$ viele Schritte.

Beispiele: Binäres Suchen, m disjunkte Intervalle!
Sortieren, Permutation finden!

Tests der Form: $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + d < 0$? Hyperebenen!

Elementtest: $W \subseteq \mathbb{R}^n$, liegt ein $x \in W$?

Epsilon-Closeness

Epsilon-Closeness

Korollar 1.6 Das Problem ϵ-Closeness hat im linearen Modell eine Zeitkomplexität von $\Theta(n \log n)$.

Epsilon-Closeness

Korollar 1.6 Das Problem ϵ-Closeness hat im linearen Modell eine Zeitkomplexität von $\Theta(n \log n)$.

Analog Element-Uniqueness!

Korollar 1.7 Das Problem Element-Uniqueness hat im linearen Modell eine Zeitkomplexität von $\Theta(n \log n)$.

Weitere Folgerungen!

Weitere Folgerungen!

Korollar 1.8 Sortieren hat auch im linearen Modell eine Zeitkomplexität von $\Theta(n \log n)$.

Weitere Folgerungen!

Korollar 1.8 Sortieren hat auch im linearen Modell eine Zeitkomplexität von $\Theta(n \log n)$.

Korollar 1.9 Für jeden Punkt einer n elementigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ seinen nächsten Nachbarn zu finden, hat Zeitkomplexität $\Omega(n \log n)$.

Weitere Folgerungen!

Korollar 1.8 Sortieren hat auch im linearen Modell eine Zeitkomplexität von $\Theta(n \log n)$.

Korollar 1.9 Für jeden Punkt einer n elementigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ seinen nächsten Nachbarn zu finden, hat Zeitkomplexität $\Omega(n \log n)$.

Korollar 1.10 Das dichteste Punktepaar (closest-pair) einer n elementigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ zu finden, hat Zeitkomplexität $\Omega(n \log n)$. (siehe auch Korollar 2.1/2.5)

Untere Schranke Schnitt Liniensegmente

Lemma 2.6 Das Existenzproblem für den Schnitt von n Liniensegmenten hat Zeitkomplexität $\Omega(n \log n)$. Das Aufzählungsproblem hat für k Schnittpunkte Zeitkomplexität $\Omega(n \log n + k)$.