# Zusammenfassung Konvexe Hülle und Durchschnitte

Elmar Langetepe
University of Bonn

# Randomisierte Inkrementelle Konstruktion

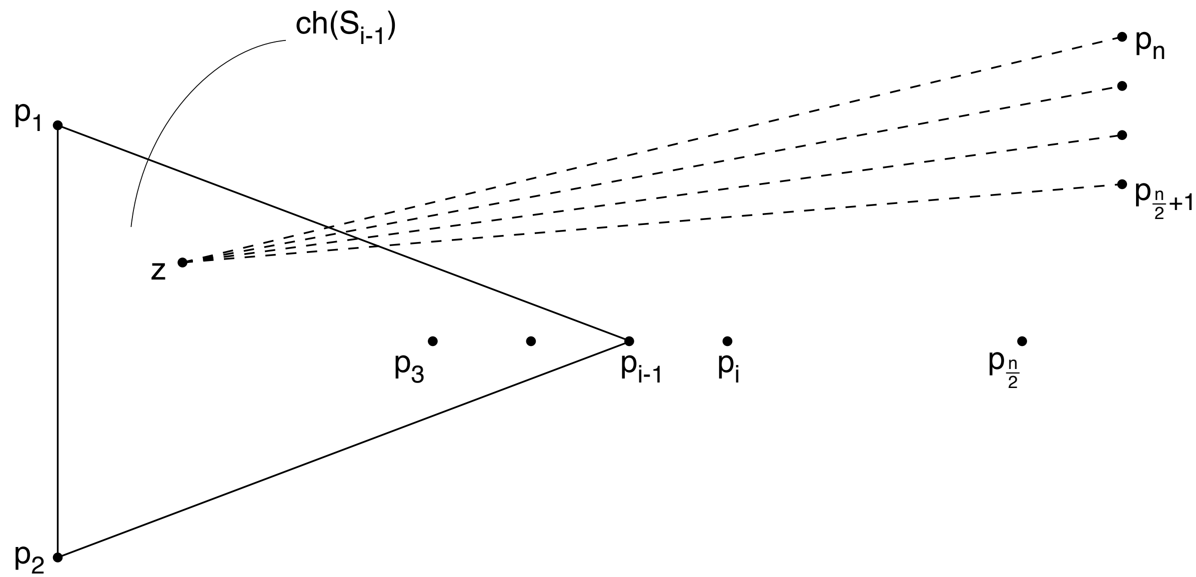
Theorem 4.6: Wird jede der $n!$ vielen Eingabereihenfolgen einer festen Punktmenge $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt, dann ergibt sich für die inkrementelle Konstruktion eine erwartete Anzahl von $O(n \log n)$ Operationen ($O(n \log n)$ Konfliktpaare).

Beispiel, Beweis!

# Worst-Case Anzahl Konflikte

$(p_i, p_j)$ in Konflikt $\iff$ $zp_j$ schneidet eine Kante von *ch*$(S_{i-1})$,
die beim Einfügen von $p_i$ entfernt wird

Schlechte Reihenfolge: $\Omega(n^2)$




Gute Eingabereihenfolge: $p_1, p_2, p_{\frac{n}{2}}, p_{\frac{n}{2}+1}, p_n$: $O(n)$!

# Beweisskizze: Randomisierte Inkrementelle Konstruktion

- Konfliktpaare: $p_i$ einfügen, $p_j$ noch nicht bearbeitet:

$$
\begin{array}{lcl}
(p_i, p_j) \text{ in Konflikt} & \iff & zp_j \text{ schneidet eine Kante von } \mathit{ch}(S_{i-1}), \\
& & \text{die beim Einfügen von } p_i \text{ entfernt wird}
\end{array}
$$

- 1. Fall: $p_j \in \mathit{ch}(S_i)$: Einmal!
- 2. Fall: $zp_j$ schneidet Kante $e = p_i p_l$ von $\mathit{ch}(S_i)$
  Lediglich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{i}$ war $p_i$ der
  letzte ausgewählte Punkt in $S_i$
  Mit WS $2/i$ wurde $e$ zuletzt eingfügt!
- Insgesamt: $1 + 2\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i} \in O(\log n)$ Konfliktpaare (festes $j$)

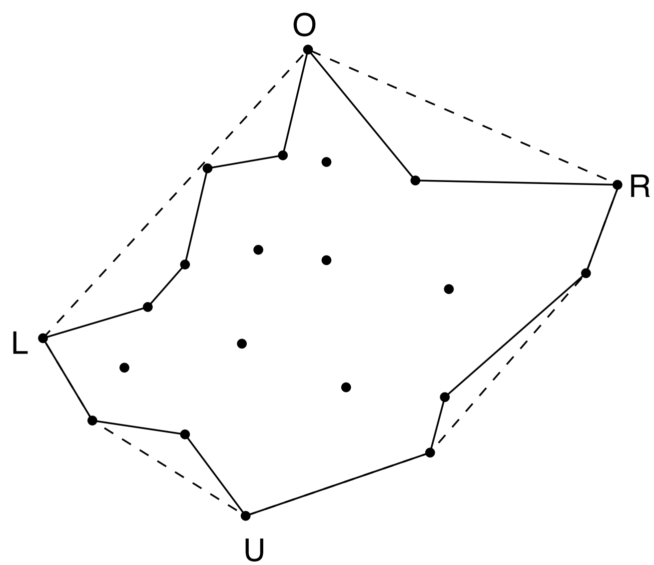
# Einfaches optimales Verfahren: Vorsortieren!

Theorem 4.7 Die konvexes Hülle von $n$ sortierten Punkten kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

Beweis: 1. Konturpolygon bestimmen! 2. Geradeziehen der Ketten!

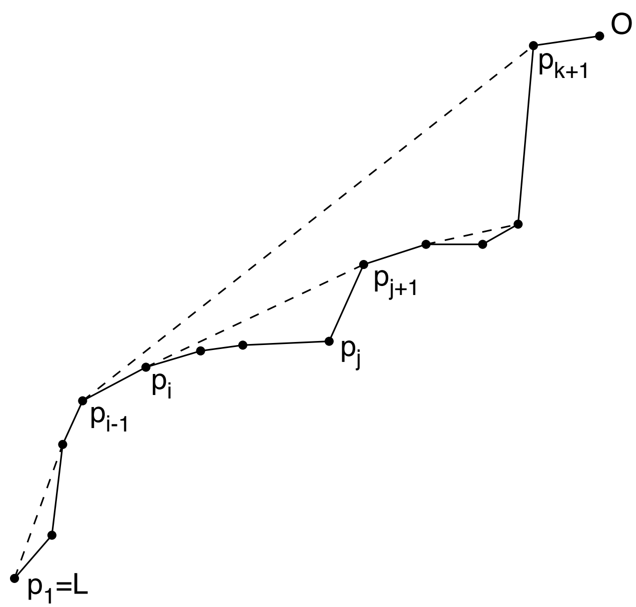
# Konturpolygon bestimmen

- Sortieren nach $X$-(oder $Y$)-Koordinate, Min., Max. $O$, $U$, $L$, $R$
- $Y$-monotone Ketten $L-O$, $O-R$, $R-U$, $U-L$, Beispiel $L-O$
- Mit Sweep in $O(n)$ erstellen!



# Konturketten in konvexe Ketten

- Sweep: Konvex-so-far, Backtracking, Beispiel Tafel
- Insgesamt nicht mehr als $O(n)$ (amortisiert) Orientationtests



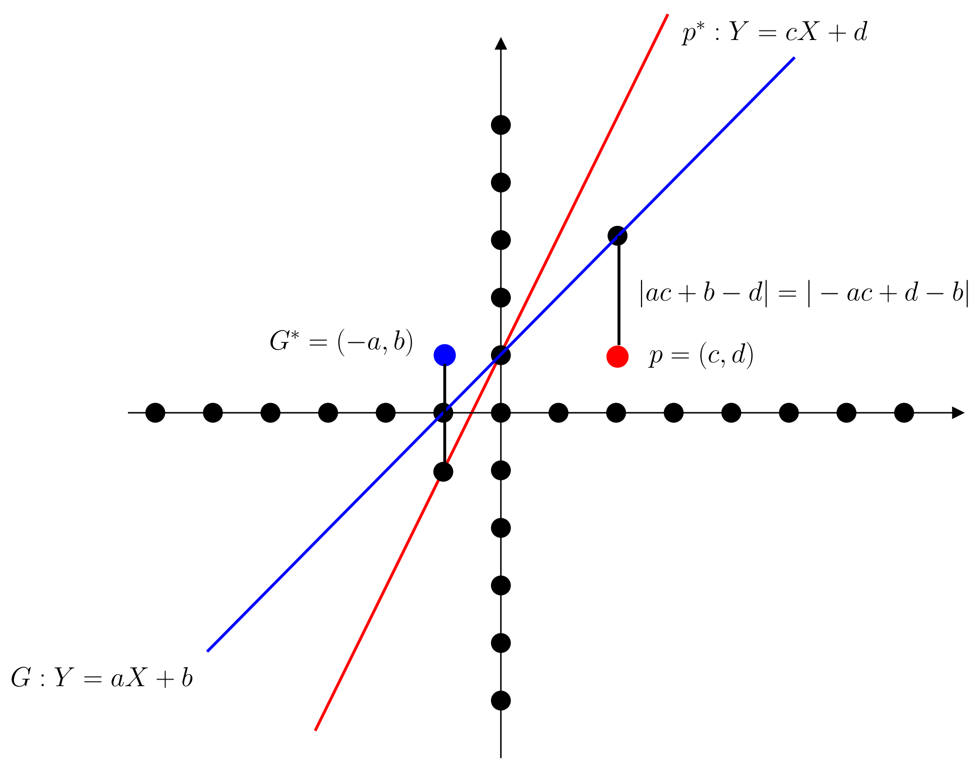
# Das Dualitätsprinzip!

Konfiguration von Punkten übertragen auf Konfiguration für Geraden

$$\begin{array}{rcl} p = \quad (a,b) & \longrightarrow & p^* = \{Y = aX + b\} \\ G^* = (-a,b) & \longleftarrow & G = \{Y = aX + b\} \end{array}$$

# Strukturelle Eigenschaften

- Relative Lage von Punkten und Geraden zueinander
- Abstände bleiben gleich, gerichteter vertikaler Abstand
- $p \in G \iff G^* \in p^*$



# Strukturelle Eigenschaften

Lemma 4.8 Für einen Punkt $p$ und eine Gerade $G$ haben wir $\mathit{gva}(p, G) = -\mathit{gva}(G^*, p^*)$. Insbesondere gilt:

$$p \text{ liegt oberhalb von } G \Longleftrightarrow p^* \text{ verläuft oberhalb von } G^*$$

# Weitere Eigenschaften

Lemma 4.9 Seien $p = (a, b)$ und $q = (c, d)$ mit $a \neq c$ und $\ell(pq)$ die Gerade durch $p$ und $q$.

Dann gilt:

$$p^* \cap q^* = (\ell(pq))^*.$$

Beweis: Konstruktiv die Punkte ausrechnen!

# Buch Kapitel

Kapitel 4.1.2 Seite 163 oben – S. 167 oben

Kapitel 4.1.3 Seite 167 oben – S. 170 unten

Kapitel 4.1.4 Seite 170 unten – S. 172 unten