WH Kompetitive Strategien und Suche

Elmar Langetepe
University of Bonn

Definitionen!

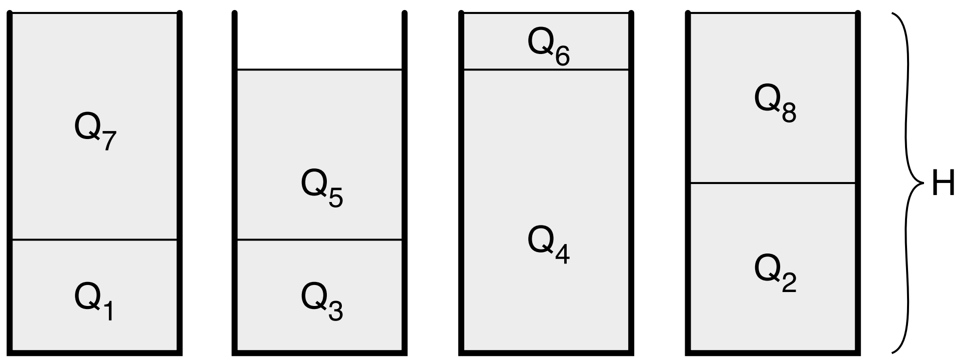
- Online Problem, unvollständige Information
- Vergleich mit Optimaler Offline-Lösung
- Beispiele: Packen von Behältern, Suche nach Objekten
- Formales Gütemaß

Def. Kompetitiver Faktor: Π Online-Problem und S Strategie, die jede Instanz $P \in \Pi$ korrekt löst. $K_S(P)$ die Kosten, die S verursacht und $K_{\text{OPT}}(P)$ die Kosten einer optimalen Offline-Lösung von P. Dann heißt S C–kompetitiv, falls es $C, A > 0$ gibt, so dass für alle $P \in \Pi$ gilt: $K_S(P) \leq C \cdot K_{\text{OPT}}(P) + A$.

Dabei wird C als der *kompetitive Faktor* bezeichnet.

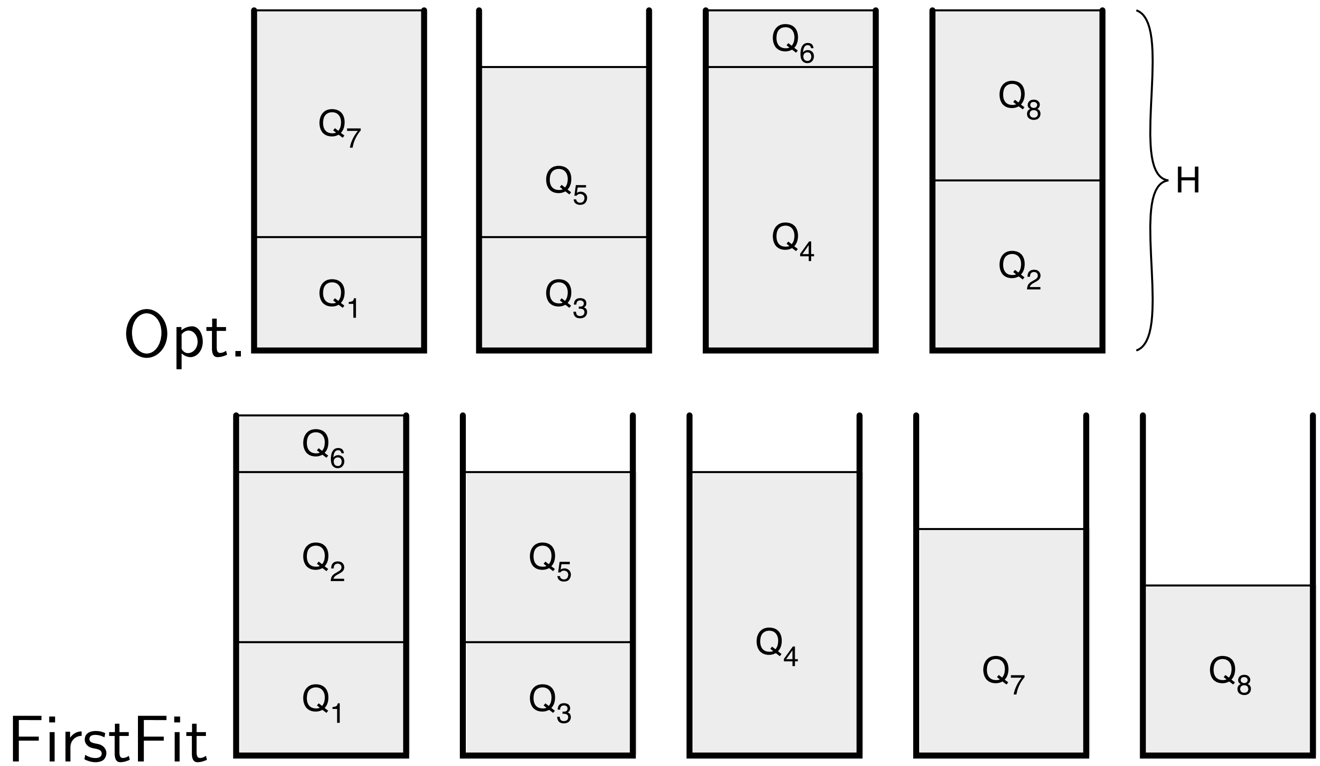
Beispiel: Bin Packing!

- Pakete verschiedener Höhe $Q_i \leq 1$
- Sukzessive in Behälter der Höhe $H = 1$
- Keine Information über das nächste Paket
- Minimiere die Anzahl der Behälter
- Beispiel: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_8$, Optimal 4 Beh.



Strategie First Fit

- Fülle aktuelles Q_i in den ersten möglichen Behälter
- Neuer Behälter, falls Q_i nicht passt!



Strategie First Fit

Theorem 7.9: Die Strategie FirstFit verwendet maximal doppelt soviele Behälter wie die optimale Strategie und somit einen kompetitiven Faktor von 2.

Beweis: $\frac{1}{2}(m-1) < \lceil \sum_{i=1}^{n} Q_i \rceil \leq$ OPT

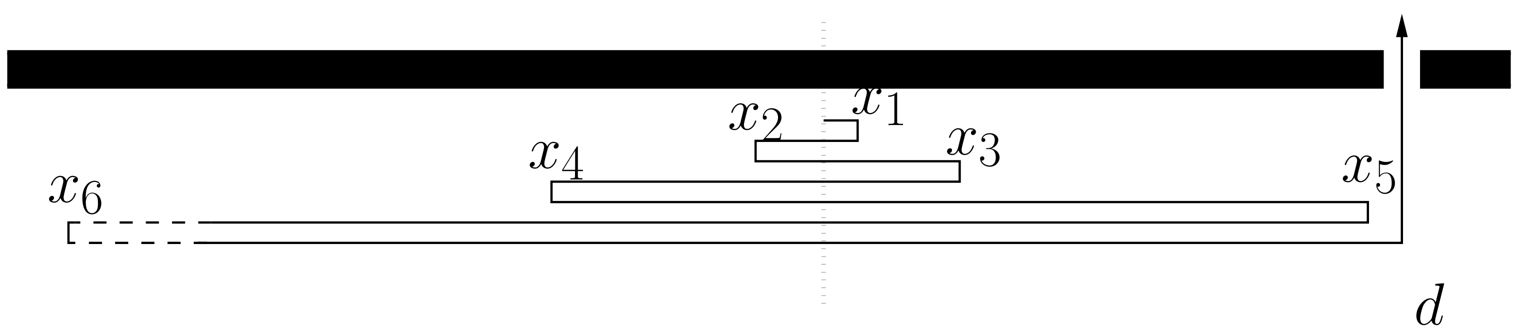
Untere Schranke: $\frac{5}{3}$

$6n : 0.15, 6n : 0.34, 6n : 0.51$: OPT $= 6n$, FirstFit ben. $10n$

Offline Problem, Komplexität: NP-hard, Partition!

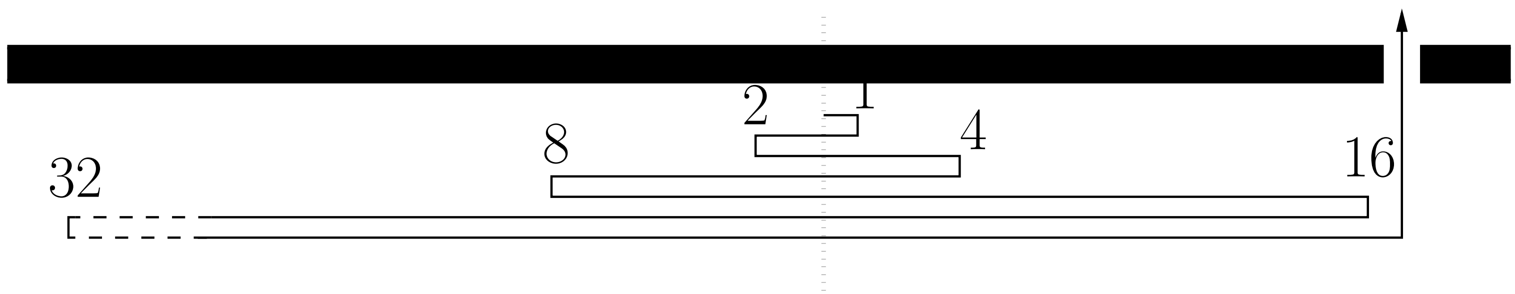
Korridore ohne Sicht!

- 2-Wege Suche: Tür entlang Gerade
- Vergleich mit kürzestem Weg zur Tür, kompetitiv?
- Sinnvolle Strategie: Tiefe x_1 rechts, Tiefe x_2 links uswusf.
- Startsituation: $2x_1 \geq C\epsilon$, für jedes $C > 0$ ex. ϵ
- Abhilfe: Additive Konstante oder Ziel ist mind 1 entfernt!
- Worst-Case, gerade bei d verpasst, nochmal zurück!
- Finde Strategie, so dass: $\sum_{i=1}^{k+1} 2x_i + x_k \leq C x_k$



Korridore ohne Sicht!

- Worst-Case, gerade bei d verpasst, nochmal zurück!
- Finde Strategie, so dass: $\sum_{i=1}^{k+1} 2x_i + x_k \leq C x_k$
- Minimiere: $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} 2x_i + x_k}{x_k} = 1 + 2\frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{x_k}$
- $x_i = 2^{i-1}$, offensichtlich Faktor $C = 9$



Korridore ohne Sicht!

Strategie $x_i = 2^{i-1}$ Doublingstrategie, Paradigma!

Theorem 7.10: Die Strategie der abwechselnden Verdopplung der Suchtiefe hat einen kompetitiven Faktor von 9.

Analysiere $1 + 2\frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{x_k}$ oder einfach $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{x_k}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k+1} 2^i}{2^k} = \frac{2^{k+2} - 2}{2^k} = 4 - \frac{2}{2^k} \leq 4$$

Theorem Opt. der Exponentialfunktion: Gal 1980

- Strategie: Sequenz $X = f_1, f_2, \ldots$
- Minimiere Funktional $F_k(f_1, f_2, \ldots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$ für alle k
- Genauer $\inf_Y \sup_k F_k(Y) = C$ und $\sup_k F_k(X) = C$
- Allgemein: Funktional F_k stetig und unimodal: Unimodal: $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$ and $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$
- Ein paar zusätzliche einf. Bedingungen!
- Z.B.: $F_{k+1}(f_1, \ldots, f_{k+1}) \geq F_k(f_2, \ldots, f_{k+1})$
- **Theorem Gal** Exponentialfunktion minimiert F_k:

$$\sup_k F_k(X) \geq \inf_a \sup_k F_k(A_a)$$

mit $A_a = a^0, a^1, a^2, \ldots$ und $a > 0$.

Unser Beispiel: Exponentialfunktion

- $F_k(f_1, f_2, \ldots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$ für alle k.
- Unimodal $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$ and $F_k(X+Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$?
- $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} A \cdot f_i}{A \cdot f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$
- $F_k(X+Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$?
- Folgt aus $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{d+b} \leq \frac{a}{b}$
- Einfache Äquivalenzumformung!
- Optimiere: $f_k(a) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} a^i}{a^k}$
- Minimiert durch $a = 2$: min. $f(a) = \frac{a^2}{a-1}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k+1} a^i}{a^k} = \frac{a^{k+2}-1}{a^k(a-1)} - \frac{1}{a^k} = \frac{a^2}{a-1} - \frac{a}{a^k(a-1)} \mapsto f(a)$$

Theorem Gal 1980/2000

Falls F_k die folgenden Bedingungen erfüllt:

i) F_k ist stetig,

ii) F_k ist unimodal: $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$ und $F_k(X+Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$,

iii) $\liminf_{a \mapsto \infty} F_k\left(\frac{1}{a^k}, \frac{1}{a^{k-1}}, \ldots, \frac{1}{a}, 1\right) = \liminf_{\epsilon_k, \epsilon_{k-1}, \ldots,, \epsilon_1 \mapsto 0} F_k\left(\epsilon_k, \epsilon_{k-1}, \ldots, \epsilon_1, 1\right)$,

iv) $\liminf_{a \mapsto 0} F_k\left(1, a, a^2, \ldots, a^k\right) = \liminf_{\epsilon_k, \epsilon_{k-1}, \ldots \epsilon_1 \mapsto 0} F_k\left(1, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k\right)$,

v) $F_{k+1}(f_1, \ldots, f_{k+1}) \geq F_k(f_2, \ldots, f_{k+1})$.

Dann gilt: $\sup_k F_k(X) \geq \inf_a \sup_k F_k(A_a)$ mit $A_a = a^0, a^1, a^2, \ldots$ und $a > 0$.

Korridore ohne Sicht!

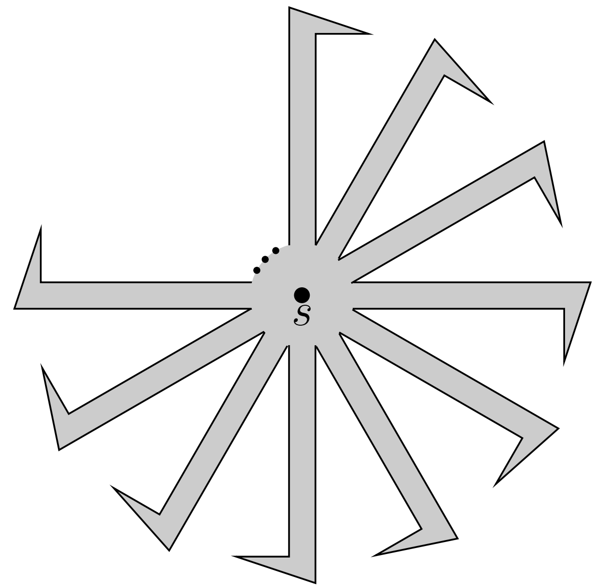
Strategie $x_i = 2^{i-1}$ Doublingstrategie!

Theorem 7.11: Die Strategie der abwechselnden Verdopplung der Suchtiefe hat den kleinstmöglichen kompetitiven Faktor.

Beweis: Anwendung des Theorems von Gal!

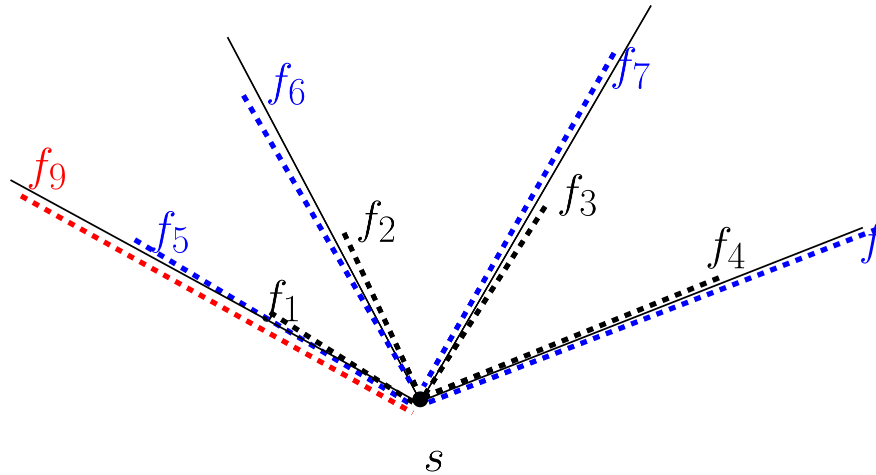
Anwendung m-Wege Suche

- Beliebiges m, nicht kompetitiv, Abb.!
- $2m - 1$ gegenüber 1!
- Festes m, unendliche Strahlen!
- Ann.: Strahlen in fester Reihenfolge, wachsende Tiefe
- Tupel (f_j, J_j): Tiefe, nächster Besuch!



Anwendung m-Wege Suche

- Ann.: (f_j, J_j), $J_j = j + m$, $f_j \geq f_{j-1}$
- Strahlen in fester Reihenfolge, wachsende Tiefe
- $F_k(f_1, f_2, \ldots) := \frac{f_k + 2\sum_{i=1}^{k+m-1} f_i}{f_k}$ für alle k.
- (Gal) Exp.-funktion minimiert F_k: $\sup_k F_k(X) \geq \inf_a \sup_k F_k(A_a)$ mit $A_a = a^0, a^1, a^2, \ldots$ und $a > 1$, optimal $a = \frac{m}{m-1}$: min $f_m(a) := \frac{a^m}{a-1}$
- Faktor: $C = 1 + 2m \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m-1}$ opt.



$$\frac{\sum_{i=1}^{k+m-1} a^i}{a^k} = \frac{a^{k+m}-1}{a^k(a-1)} - \frac{1}{a^k} = \frac{a^m}{a-1} - \frac{a}{a^k(a-1)} \mapsto f_m(a)$$

m-Wege Suche

- **Lemma** Es gibt stets eine optimale m-Wege Strategie $(f_1, f_2, \ldots)$, die die Strahlen in fester Reihenfolge und mit wachsender Tiefe besucht!
- periodisch und monoton, also: (f_j, J_j), $J_j = j + m$, $f_j \geq f_{j-1}$
- Beweis Tafel! Strategie ändern! Bedingungen erfüllen!