Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt

Online-Algorithmen
Sommersemester 2015
Abgabe: 28.04.2015, 14:00 Uhr

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

8 Punkte

Betrachten Sie folgende Version von LRU: Jede Seite p aus der Menge der Seiten erhält ein Gewicht $w(p)$, welches zu Beginn null ist. Wird eine Seite $\sigma_i = p$ zum Zeitpunkt i angefragt und verursacht einen Seitenfehler, setzen wir $w(p) = k$. Für alle Seiten q mit $w(q) > 0$ veringern wir außerdem das Gewicht um 1. Der Cache enthalte in jedem Schritt genau die Seiten q mit $w(q) > 0$. Zeigen Sie:

(a) Der Algorithmus entspricht dem Algorithmus LRU aus der Vorlesung.

(b) Beweisen Sie mithilfe der Potentialfunktion $\Phi_i = \sum_{p \in C^i_{LRU} \setminus C^i_{OPT}} w(p)$, dass LRU k-kompetetiv ist, wobei C^i_{LRU} bzw. C^i_{OPT} den jeweiligen Cache nach der aktuellen Anfrage i bezeichnet.

Aufgabe 3.2

8 Punkte

Der Beweis von Theorem 2.12 verwendet eine Sequenz σ, die auf $k+m$ paarweise verschiedene Seiten zugreift. Um zu zeigen, dass RANDOM für kein $r < k$ einen kompetitiven Faktor von r erreicht, muss dafür m beliebig groß gewählt werden dürfen. Damit bleibt offen, welchen kompetitiven Faktor RANDOM auf Sequenzen besitzt, die nur auf eine beschränkte Anzahl an verschiedenen Seiten zugreifen.

Modifizieren Sie den Beweis von Theorem 2.12 so, dass die verwendete Sequenz σ nur auf $k+1$ paarweise verschiedene Seiten zugreift.

Aufgabe 3.3

8 Punkte

Im Beweis von Theorem 2.14 wird gezeigt, dass kein randomisierter Online-Algorithmus einen besseren kompetitiven Faktor als H_k erreicht, nicht einmal auf Sequenzen, die nur auf $k+1$ verschiedene Seiten zugreifen.

Zeigen Sie, dass MARK auf solchen Sequenzen H_k-kompetitiv (und damit ein optimaler randomisierter Online-Algorithmus auf solchen Sequenzen) ist.