Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt

Online-Algorithmen
Sommersemester 2015
Abgabe: 19.05.2015, 14:00 Uhr

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

2+2 Punkte

(a) Geben Sie eine zusätzliche Bedingung für die Potentialfunktion in Theorem 2.9 an, aus welcher strikte Kompetitivität folgt.

(b) Folgern Sie, für welche Start-Konfigurationen der Server der DC-Algorithmus auf Bäumen strikt k-kompetitiv ist.

Aufgabe 6.2

2+3+3 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit positiven Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Zeigen Sie: Jeder Spannbaum T liefert eine dominante Metrik d_T für die durch G induzierte Metrik d.

(b) Sei s_T der Streckungsfaktor einer Baummetrik d_T gegenüber der induzierten Metrik d. Geben Sie einen $s_T \cdot k$-kompetitiven Algorithmus für das k-Server Problem auf G an (und beweisen Sie dessen kompetitiven Faktor).

(c) Sei $T = (V, E_T)$ ein minimaler Spannbaum von G. Zeigen Sie, dass $s_T \leq N - 1$ gilt, wobei $N = |V|$ gilt.

Aufgabe 6.3

4+4 Punkte

Sei $n = a^2$ für eine natürliche Zahl a. Wir betrachten den metrischen Raum $\mathcal{M} = (M, d)$ mit $M = \{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, a\}$ und $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

(a) Geben Sie einen $k \cdot (a + 1)$-kompetitiven deterministischen Online-Algorithmus für das k-Server-Problem auf dem metrischen Raum $\mathcal{M}$ an.

(b) Geben Sie einen $k \cdot \left(\frac{a}{2} + 1\right)$-kompetitiven randomisierten Online-Algorithmus für das k-Server-Problem auf dem metrischen Raum $\mathcal{M}$ an.

Aufgabe 6.4

3+3+2 Punkte

Wir betrachten metrische Räume $\mathcal{M} = (M, d)$, für die $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge ist und die Metrik d folgende Eigenschaft besitzt: Für je drei Punkte $x, y, r \in M$, die auf einer Geraden liegen, wobei y zwischen x und r liegt, und einen beliebigen Punkt $p \in M$ folgt aus $d(x, p) \leq d(r, p)$, dass auch $d(y, p) \leq d(r, p)$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass der Raum $\mathbb{R}^n$, ausgestattet mit dem euklidischen Abstand, ein solcher Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass der $\mathrm{SC}_{\frac{1}{2}}$-Algorithmus 3-kompetitiv für das 2-Server-Problem in jedem solchen metrischen Raum $\mathcal{M}$ ist.

(c) Geben Sie eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ an, für die der metrische Raum $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, d)$ nicht die gewünschte Eigenschaft besitzt.