Algorithmen und Berechnungskomplexität II SS 16

Universität Bonn, Institut für Informatik, Abteilung I

11. Aufgabenblatt zur Vorlesung **Abgabe: -**

- *Dieses Übungsblatt wird nur im Tutorium besprochen!*

Aufgabe 42: Simulation einer NTM

Formulieren Sie ein Konstruktionsschema, um eine nichtdeterministische $p()$-zeitbeschränkte Turingmaschine N durch eine deterministische Turingmaschine D zu simulieren, wobei die Laufzeit von D in $2^{O(p())}$ liegt.

Aufgabe 43: 2-SAT

Für eine gegebene aussagenlogische Formel $\alpha = k_1 \wedge \cdots \wedge k_\ell$ vom Grad ≤ 2 über m Variablen $x_1, \ldots, x_m$ konstruieren wir den gerichteten Graphen $G^\alpha = (V, E)$ wie folgt.

Für jede Variable $x_i, 1 \leq i \leq m$, enthält V je einen Knoten „x_i“ und einen Knoten „$\neg x_i$“. Weiterhin enthält E genau dann eine gerichtete Kante (v, w), wenn es in α eine zu $v \Rightarrow w$ äquivalente Klausel gilt.
Hinweis: Eine Klausel $(x \vee y)$ ist zu $\neg x \Rightarrow y$ und zu $\neg y \Rightarrow x$ äquivalent, wohingegen eine Klausel (x) bzw. $(x \vee x)$ zu $\neg x \Rightarrow x$ äquivalent ist.

- Zeigen Sie: Wenn G^α einen gerichteten Kreis K enthält mit $x_i \in K$ und $\neg x_i \in K$ für ein $i, 1 \leq i \leq m$, dann ist α unerfüllbar.
- Benutzen Sie vollständige Induktion über m um zu zeigen, dass wenn α unerfüllbar ist G^α einen gerichteten Kreis K enthält, mit $x_i \in K$ und $\neg x_i \in K$ für ein $i, 1 \leq i \leq m$.

Folgern Sie aus den obigen Aussagen, dass 2-SAT in P liegt.

Bitte wenden!

Aufgabe 44: **Polynomielle Reduktion**

Betrachten Sie die folgenden Probleme.

PROBLEM P_1
Gegeben: Menge $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ aus n natürlichen Zahlen.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $T \subset M$, sodass $\sum_{a_i \in T} a_i = \sum_{a_j \in M \setminus T} a_j$ gilt?

PROBLEM P_2
Gegeben: Menge $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ aus n natürlichen Zahlen und $b \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $T \subseteq M$, sodass $\sum_{i \in T} a_i = b$ gilt?

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von P_1 auf P_2 an. Welche Schlüsse lassen sich daraus für P_1 und P_2 ziehen?

Aufgabe 45: **Aussagenlogik**

Zeigen Sie, dass für die Variablenmenge $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ der aussagenlogische Ausdruck

$$\mathit{ExactOne}(x_1, x_2, \ldots, x_l) := \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq l} (\neg x_i \vee \neg x_j) \right) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \cdots x_l)$$

genau dann erfüllbar ist, wenn genau eine Variable aus V wahr ist. Zeigen Sie weiterhin, dass der Ausdruck $\mathit{ExactOne}(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ genau l^2 Literale enthält.