Algorithmen und Berechnungskomplexität II — SS 16

Universität Bonn, Institut für Informatik, Abteilung I

12. Aufgabenblatt zur Vorlesung **Abgabe: -**

Aufgabe 46: Polynomielle Reduktion

Betrachten Sie die folgenden Probleme.

Problem P_1
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $T \subseteq V$ der Knoten mit $|T| \geq k$, sodass keine zwei Knoten aus T durch eine Kante von G verbunden sind? (d.h. $\forall u, v \in T$ gilt $(u, v) \notin E$)

Problem P_2
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein $k' \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $T' \subseteq V$ der Knoten mit $|T'| \leq k'$, sodass für jede Kante von G mindestens einer der inzidenten Knoten in T' liegt? (d.h. $\forall (u, v) \in E$ gilt $u \in T'$ oder $v \in T'$)

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von P_1 auf P_2 an. Welche Schlüsse lassen sich daraus für P_1 und P_2 ziehen?

Aufgabe 47: Sprachen in *NP*

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in *NP* liegen. Beschreiben Sie dazu Programm und Laufzeit einer nichtdeterministischen Turingmaschine N, die die jeweilige Sprache entscheidet.

- $L_1 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} w \text{ ist binäre Kodierung einer Zahl } k \in \mathbb{N} \\ \text{und } k \text{ ist keine Primzahl.} \end{array} \right\}$
- $L_2 = \left\{ x \in \{0,1,\#\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ ist gültige Kodierung einer Menge } M \text{ aus} \\ m \text{ natürlichen Zahlen und das Problem} \\ \text{Partition kann für } M \text{ gelöst werden.} \end{array} \right\}$

Bitte wenden!

Aufgabe 48: Der Satz von Cook und Levin

Skizzieren Sie (kurz, auf nicht mehr als 1 Seite) mit eigenen Worten den Beweis des Satzes von Cook und Levin.

Aufgabe 49: Max-3-SAT

Das Problem *Max*-3-*SAT* ist wie folgt definiert.

***Max*-3-*SAT*:** Gegeben: Ein Aussagenlogischer Ausdruck $\alpha = k_1 \wedge k_2 \wedge \cdots \wedge k_\ell$ mit Klauseln vom Grad ≤ 3 in Konjunktiver Normalform mit insgesamt m verwendeten Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, und eine Zahl t.
Frage: Gibt es eine Belegung der Variablen, so dass mindestens t Klauseln aus $k_1, k_2, \ldots, k_l$ true sind?

1. Beweisen Sie, dass Max-3-SAT NP-Vollständig ist. Verwenden Sie hierbei eine Reduktion von 3-SAT.

2. Geben Sie ein Konstruktionssschema an, welches eine Belegung der Variablen konstruiert, so dass mindestens $\lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ Klauseln erfüllt werden. *Hinweis: Starten Sie mit irgendeiner Belegung der Variablen. Wieviele Klauseln werden von dieser erfüllt?*

3. Betrachten Sie den Fall, dass in jeder Klausel 3 Literale zu jeweils 3 verschiedenen Variablen enthalten sind. Für eine beliebige Belegung B der Variablen bezeichne $\phi(\alpha, B)$ die Anzahl Klauseln in α welche durch B erfüllt sind. Bestimmen Sie zunächst den Wert

   $$\Phi(\alpha) = \sum_{\text{Belegung } B \text{ der Variablen } x_1,\ldots x_m} \phi(\alpha, B) \ .$$

   Beweisen Sie nun, dass es eine Belegung gibt die mindestens $\Phi(\alpha)/2^m$ viele Klauseln von α erfüllt. Dies entspricht wieviel Prozent der Klauseln?