Grundlagen der Algorithmischen Geometrie SS 2017
Übungszettel 4
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 23.05.2017, bis 12:15 Uhr Besprechung: 29.-2.6.

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer und den Namen angeben.*
- *Die Abgabe kann in Gruppen von bis zu 3 Personen erfolgen.*

Aufgabe 1: Binärzähler (4 Punkte)

Betrachten Sie einen Binärzähler, der in Einer-Inkrement-Zählschritten von 0 bis n hochzählt. Dabei treten pro Zählschritt unterschiedlich viele Überträge im Binärsystem auf. Ein Elementarschritt sei definiert als die Umschaltung genau eines Bits ('$0 \to 1$' oder '$1 \to 0$').

Zeigen Sie: Beim Hochzählen eines Binärzählers von 0 bis n braucht man *im Mittel* pro Zählschritt höchstens konstant viele Elementarschritte. Wie groß ist diese Konstante?

Aufgabe 2: Dynamisierung (4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie eine Dynamisierung mittels Kombination von Binärstruktur und gelegentlichem Neubau kennengelernt. Damit kann ein statischer Datentyp so dynamisiert werden, dass die Kosten von *Insert* und *Delete* gering sind, wenn man über eine Folge von Operationen mittelt. Eine strengere Mittelung als die aus der Vorlesung verlangt, dass der Mittelwert aus den Kosten einer Operation *Insert* (W_n, d) und den Kosten der vorausgegangenen m *Insert*-Operationen durch eine Funktion der aktuellen Strukturgröße n beschränkt ist, wobei $m \geq 0$ frei gewählt werden kann.
Zeigen Sie, dass bei der Verwendung dieser strengen Definition die Aussage

$$Insert \in O(log\ s\ \frac{B_V(s)}{s})$$

nicht mehr gilt.
Hinweis: Man betrachte eine Folge von $2^{a+b} - 2^a$ Einfügungen in die anfangs leere Struktur, an die sich $2^{a+b} - 2^a - 2^b + 1$ Entferneoperationen und eine weitere Einfügung anschliessen.

Aufgabe 3: Schwaches Entfernen (4 Punkte)

Bei der Dynamisierung von Datenstrukturen wurde die Kombination von Binärstruktur und gelegentlichem Neubau betrachtet. Für das schwache Entfernen wird ein balancierter Baum T benutzt, um die richtige Teilstruktur V_i zu finden, aus der das Element schwach entfernt werden soll. Das Element wird dabei auch aus T entfernt.

Warum reicht es nicht aus, das Element nur aus T zu entfernen? Beim wiederholten Entfernen würde man doch sofort feststellen, dass das Element nicht mehr vorhanden ist.

Aufgabe 4: Zerlegbare Anfragen (4 Punkte)

Die in der Vorlesung vorgestellte generische Dynamisierung setzt voraus, dass Anfragen an die Datenstruktur *zerlegbar* sind. Das heißt, wir verlangen, dass ein binärer Operator $\otimes$ existiert, sodass für jede Binärdarstellung $V_1, ..., V_{\lfloor \log n \rfloor}$ von V gilt:

$$\text{query}(V, q) = \otimes \big(\text{query}(V_1, q), \ldots \otimes \big(\text{query}(V_{\lfloor \log n \rfloor - 1}, q), \text{query}(V_{\lfloor \log n \rfloor}, q)\big) \ldots\big)$$

wobei $\otimes$ in konstanter Zeit ausgewertet werden kann.

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Zerlegbarkeit der folgenden vier Anfragetypen:

Lineare Programmierung: Ist q eine zulässige Lösung? Das heißt, erfüllt $q \in \mathbb{R}^n$ die gespeicherten linearen Nebenbedingungen

$$\begin{array}{cccc} a_{11}q_1 & + \ldots & +a_{1n}q_n & \leq b_1 \\ a_{21}q_1 & + \ldots & +a_{2n}q_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}q_1 & + \ldots & +a_{mn}q_n & \leq b_m \end{array}$$

Extrempunktberechnung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Welcher gespeicherte Punkt maximiert f?

Konvexe Hülle – Elementtest: Liegt q innerhalb der konvexen Hülle der gespeicherten Punkte?

Konvexe Hülle – Lokale Sicht: In welchem kleinsten Winkelfeld mit Scheitel q liegt die konvexe Hülle der gespeicherten Punkte?