Grundlagen der Algorithmischen Geometrie SS 2017
Übungszettel 6
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 13.06.2017, bis 12:15 Uhr Besprechung: 19.-23.6.

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer und den Namen angeben.*
- *Die Abgabe kann in Gruppen von bis zu 3 Personen erfolgen.*

Aufgabe 1: Prioritätsbaum (4 Punkte)

Geben Sie einen Prioritätssuchbaum an, bei dem in *zwei* Blättern Punkte gespeichert sind. Welche Höhe muss ein solcher Baum mindestens haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Konvexe Hülle Extremfall (4 Punkte)

Gegeben sei eine Menge S von n Punkten in der Ebene. Nehmen wir an, wir wissen bereits, dass jeder Punkt aus S auf dem Rand der konvexen Hülle $ch(S)$ von S liegt.

Können Sie unter dieser Voraussetzung einen Algorithmus konstruieren, der die konvexe Hülle von S in Zeit $O(n)$ berechnet?

Aufgabe 3: Konvexe Hülle und Durchmesser (4 Punkte)

Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene. Der maximale Abstand zwischen je zwei Punkten aus S wird auch $diam(S)$, Durchmesser von S, genannt.

Zeigen Sie: Der Durchmesser von S entspricht dem Durchmesser der konvexen Hülle von S und die Punkte mit maximalem Abstand liegen auf dem Rand der konvexen Hülle.

Aufgabe 4: (a, b)**-Baum (4 Punkte)**

Seien a und b zwei ganze Zahlen mit $a \geq 2$ und $b \geq 2a - 1$. Ein Baum T heißt *(a,b)-Baum*, wenn

- alle Blätter von T die gleiche Tiefe haben,
- alle Knoten v von T die Eigenschaft $\rho(v) \leq b$ erfüllen;
- alle Knoten v, außer der Wurzel, die Eigenschaft $\rho(v) \geq a$ erfüllen;
- die Wurzel r die Eigenschaft $\rho(r) \geq 2$ erfüllt.

Dabei sei $\rho(v)$ die Anzahl der Söhne des Knoten v.

Geordnete Teilmengen der Ordnung n lassen sich in (a, b)-Bäumen mit n Blättern so speichern, daß die Kosten der Suche nach einem Element proportional zu $b \cdot Höhe(T)$ sind. Die Elemente werden in den Blättern gespeichert und geeignete Schlüssel in den Nicht-Blattknoten verwendet. In einen Knoten v werden dabei $\rho(v) - 1$ Schlüssel für die entsprechenden Verzweigungen eingetragen.

Ein solcher (a, b)-Baum für n Zahlen kann in Zeit $O(n \log n)$ aufgebaut werden und benötigt $O(n)$ viel Speicherplatz. Eine Anfrage nach allen Zahlen in einem Intervall läßt sich damit in Zeit $O(\log n + k)$ beantworten; hierbei bezeichnet k die Größe der Antwort.

a) Überlegen Sie, wie die Schlüssel aufgebaut sein müssen. Geben Sie dazu einen konkreten $(2, 3)$-Baum T mit 9 Blättern für die Menge

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

mit geeigneten Schlüsseln in den Nicht-Blattknoten an, bei dem die Kosten der Suche nach einem Element aus M proportional zu $3 \cdot Höhe(T)$ wird.

b) Sei T ein (a, b)-Baum mit n Blättern und der Höhe h. Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für h in Abhängigkeit von a, b und n an.

c) Welche Laufzeiten ergeben sich für das Einfügen und Entfernen von Zahlen und für eine Anfrage nach allen Zahlen in einem Intervall für einen *dynamisierten (a,b)-Baum* von n Zahlen?