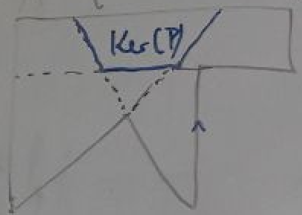
P einfaches Polygon mit n Ecken

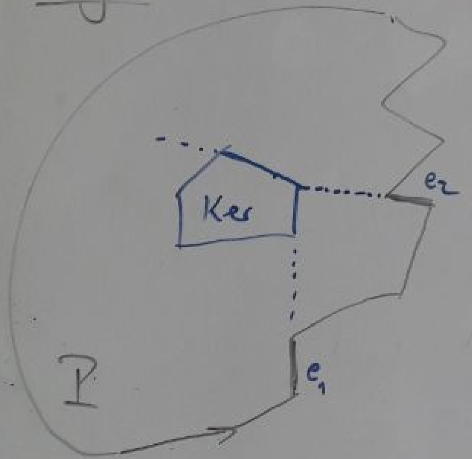


$Ker(P) = \{p \in P;\ vis(p) = P\}$

= Durchschnitt der inneren Halbebenen

$\rightsquigarrow$ $O(n \log n)$ Zeit, $O(n)$ Platz

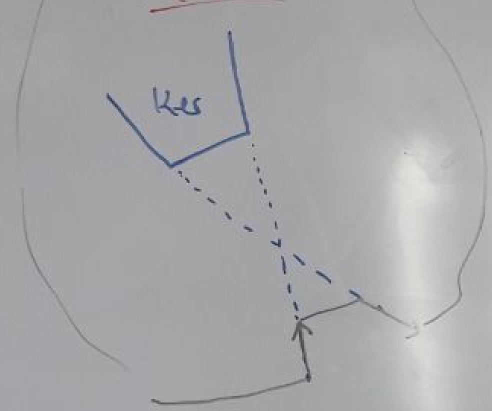
Frage: Geht das schneller?



Beobachtung:

e_2 gegenüber e_1 linksherum verdreht

Aber:



Sei $\alpha_{max} := \max_{i \neq j} \alpha_{i,j}$ der maximale Drehwinkel zwischen Kanten auf ∂P

$$= \alpha(e_s, e_t)$$

① $\alpha_{max} \geq 3\pi \implies Ker(P) = \emptyset$

Bew: $\alpha(e_t, e_s) = 2\pi - \alpha(e_s, e_t) \leq -\pi$

möglicherweise gibt es Teilfolge $e_t \cdots e_i \cdots e_k \cdots e_j \cdots e_s$

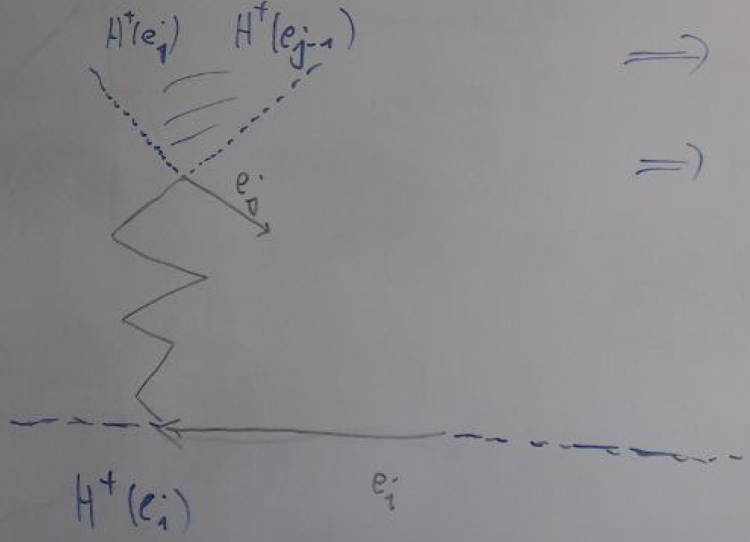
mit $\alpha(e_i, e_j) \leq -\pi$. Falls ja, nimm die mit minimaler Länge.

jede Kante e_k in $e_i \cdots e_{j-1}$ ist gegenüber e_i rechtsherum verdreht (Minimalität)

aber höchstens um halbe Drehung (Minimalität)

Also

Also:



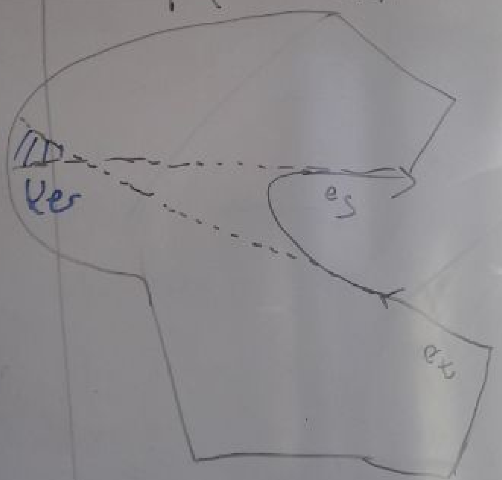
$$\Longrightarrow \; H^+(e^i_{j-1}) \cap H^+(e^i_j) \cap H^+(e^i_1) = \emptyset$$

$$\Longrightarrow \; \mathrm{Ker}(P) = \emptyset.$$

$) \cap H^+(e_j) \cap H^+(e_1') = \phi$

$= \phi.$

Bsp für α_{max} etwas kleiner als 3π:



Sei $\alpha_{max} = \alpha(e_s, e_t) < 3\pi$:

Wir konstruieren zwei Teilfolgen von Kanten:

F: starte bei e_s; nimm jede Kante in F auf, die weiter links herum gedreht ist als ... durchlaufe ∂P gegen Uhrzeiger und

B: starte bei e_t'; durchlaufe ∂P im Uhrzeiger und nimm jede Kante in B auf, die weiter gedreht ist als ihre Vorgänger in B.

Spiegeln

Theorem: $\operatorname{Ker}(P) = \bigcap_{f \in F} H^+(f) \cap \bigcap_{b \in B} H^+(b)$

Beweis: $\subseteq$ trivial

$\supseteq$: Sei e_0 Kante $\notin F \cup B$; zeige: e_0 hat mit $\partial \operatorname{Ker}$ nichts

$\ldots t) < 3\pi$;

Teilfolgen von Kanten:

nimm jede Kante in F auf, die weiter links herum gedreht ist als ihre Vorgängerin in F

durchlaufe ∂P gegen Uhrzeiger und

Spiegelung

durchlaufe ∂P im Uhrzeiger und nimm jede Kante in B auf, die weiter rechts herum

ihre Vorgänger in in B.

$$= \bigcap_{f \in F} H^+(f) \cap \bigcap_{b \in B} H^+(b)$$

$\subseteq$ trivial

$\supseteq$: Sei e_0 Kante $\notin F \cup B$; zeige: e_0 hat mit ∂K nichts zu schaffen

1. Fall e_0 liegt in $e_s - - e_t$

$\alpha_{max} < 3\pi \implies \forall i,j: \alpha(e_i, e_j) = 2\pi - \underbrace{\alpha(e_j, e_i)}_{\leq \alpha_{max} < 3\pi} \geq -\pi$ (*)

Sei $e_s = f_0 \cdots f_1 \cdots f_i \cdots e_0 \cdots f_{i+1} \cdots e_t$

erst f_{i+1} ist gegenüber f_i linksherum verdreht $\implies$

$\forall e_k$ mit $f_i \cdots e_k \cdots e_0$: $\alpha(f_i, e_k) \underset{(*)}{\geq} -\pi$

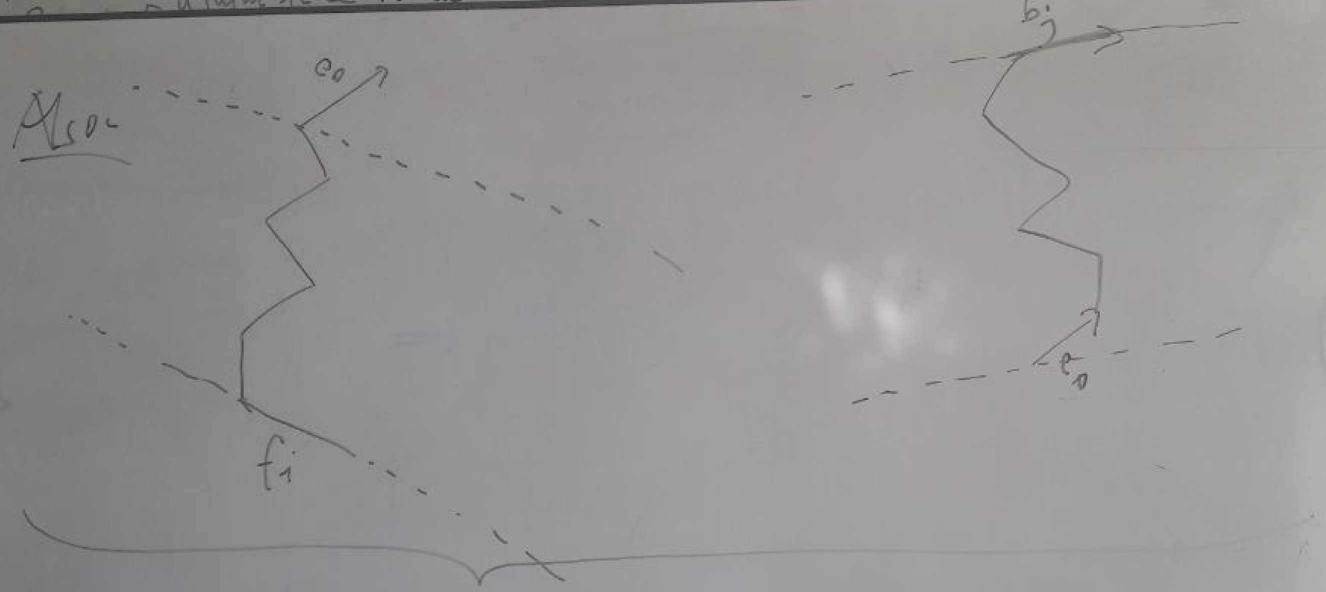
Analog $e_s \cdots b_{j+1} \cdots e_0 \cdots b_j \cdots b_0 = e_t$

rückwärts betrachtet; erst b_{j+1} ist gegenüber b_j rechtsherum gedreht $\to$

alle e_k mit $e_0 \cdots e_k \cdots b_j$ sind gegenüber b_j linksherum gedreht, aber höchstens um π

nimm jede Kante in T auf, die

Also



wissen:

$-\pi < \alpha($

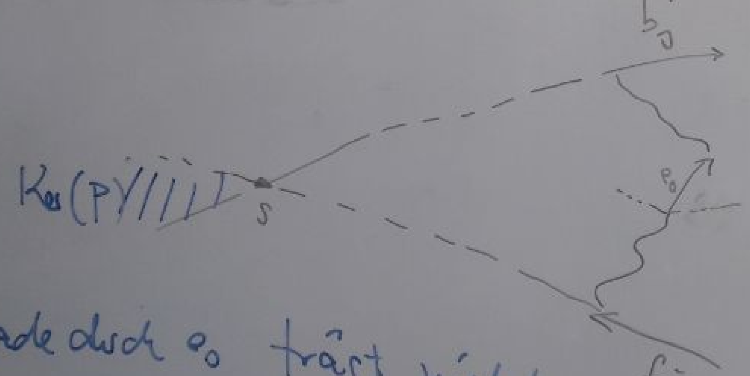
⇒ b_j gegen

des höch

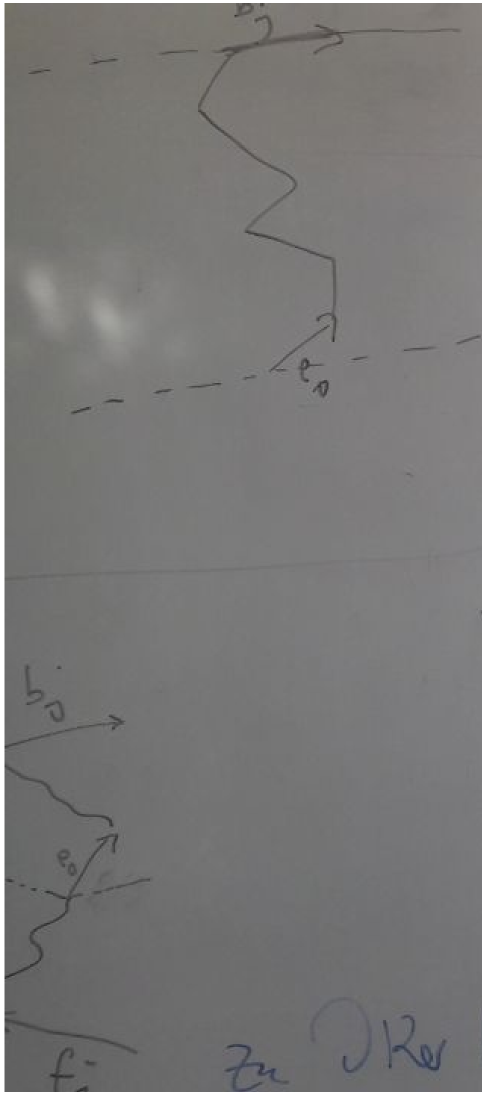
⇒ Schnitt

2. Fall: e_0

⇐)



⇒ Gerade durch e_0 trägt nicht f_1 zu ∂Ker bei



Zu ∂ Ker bei:

<u>wissen:</u>

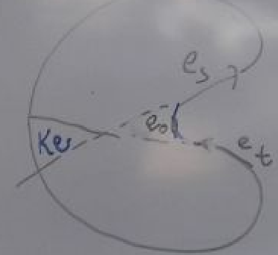
$$-\pi < \alpha(f_i, b_j) = \underbrace{\alpha(f_i, e_0)}_{\leq 0} + \underbrace{\alpha(e_0, b_j)}_{\leq 0} \leq 0$$

(*)

→ b_j gegenüber f_i rechtsherum verdreht, aber höchstens um 180°

⇒ Schnittpunkt s existiert

2. Fall: e_0 in $e_t \ldots e_s$



analog.

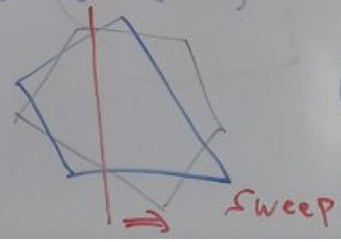
→ Bed

Algorithmus zur Berechnung von Ker(P):

- berechne α_{max} (und e_s, e_t) $O(n)$ (maximum subvector)
- falls $\alpha_{max} \geq 3\pi$ berichte $Ker(P) = \emptyset$
- falls $\alpha_{max} < 3\pi$,   Konstruiere Folgen F und B zwischen e_s, e_t $O(n)$
- Berechne $\bigcap_{f \in F} H^+(f)$ und $\bigcap_{b \in B} H^+(b)$ $O(n)$,

  denn: Kanten in F nach Steigung sortiert

  $\xrightarrow{\text{Dualisieren}}$ Konvexe Hülle von Punkten, die nach x sortiert sind,
- Berechne $\bigcap_{f \in F} H^+(f) \cap \bigcap_{b \in B} H^+(b)$ $O(n)$



Sei α_{ma}

Wir Konstrui

F: sta

B: sta

ge

Theo

Bewe

Theorem: P einfaches Polygon mit n Ecken

$\Longrightarrow$ $Ker(P)$ berechnen in Zeit und Platz $O(n)$.

optimal

4.3.3 Kunstgalerie-Problem (J. O'Rourke: Art galleries)

P: einfaches Polygon mit n Ecken,
soll von stationären Wächtern bewacht werden.

Problem: Bestimme die kleinstmögliche Zahl an Wächtern und ihre Aufstellung.

Bekannt: NP-hart; APX-hart, d.h. vermutlich nur bis auf Konstante approximierbar.

Theorem

Beweis:

ausreichend

Sei T eine

Lemma: Man

dass die

Beweis: Indu

$n \geq 4$:

Theorem 4.21 $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ viele Wächter sind immer ausreichend u

Beweis: nötig:

Klar: pro Zacken:

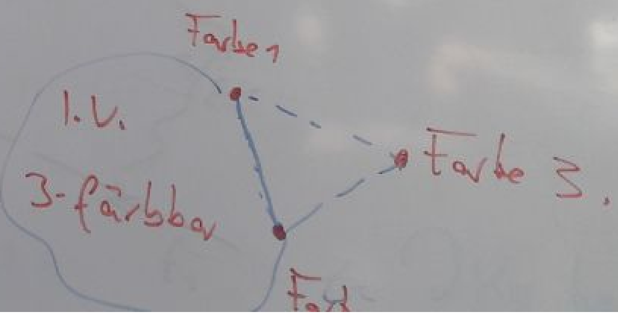
ausreichend (Chvatal)

Sei T eine Triangulation von P.

Lemma: Man kann die Knoten von T so mit 3 Farben färben, dass die Endpunkte jeder Kante unterschiedliche Farben haben.

Bew: Induktion (n). $n=3$

$n \geq 4$: Ohrabschneiden:



Sei i

häufig

$\Longrightarrow$ hö

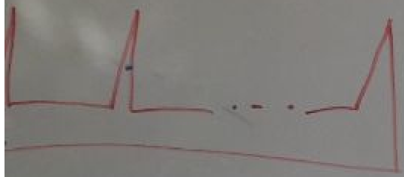
DaA s

Klar: I

hat ein

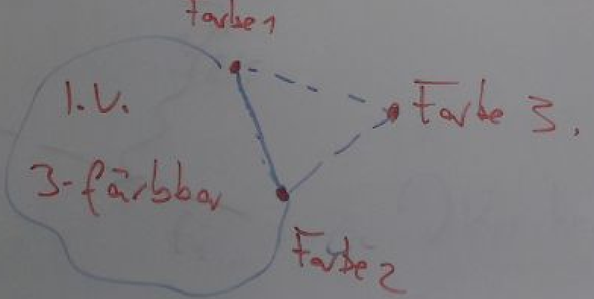
P

Wächter sind immer ausreichend und manchmal nötig.



Klar: pro Zacken: 3 Kanten
1 Wächter.

T so mit 3 Farben färben,
e unterschiedliche Farben haben.



Sei i die Farbe, die am wenigsten häufig vorkommt

$\Rightarrow$ höchstens $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Knoten haben Farbe i.

Dort stellen wir die Wächter auf.

Klar: In jedem Dreieck von T hat ein Knoten Farbe i

$\Rightarrow$ P komplett bewacht. $\square$