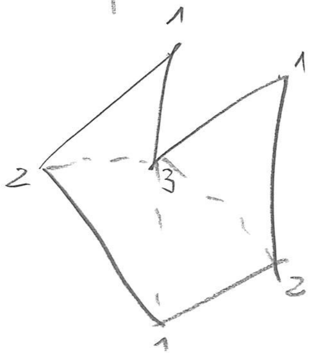
AlgGeo 12.1

(1) Ker(P) in Zeit $O(n)$; optimal! Cole und Goodrich '92

(2) Kunstgalerie-Problem: Wieviele Wächter sind nötig, um P zu bewachen?

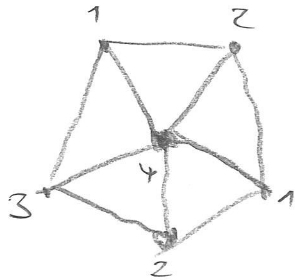
<u>Theorem</u>: $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ stets ausreichend, manchmal nötig

Triangulation eines einfachen Polygons ist 3-färbbar



pro Zacke:
1 Wächter
3 Kanten

Stimmt nicht für beliebige Triangulationen beliebiger Punktmengen



braucht 4 Farben

<u>Appel, Haken 1976</u>
verwendet Computer,
um 1936 Fälle zu checken

<u>Vier-Farben-Theorem</u>: Jeder planare Graph ist 4-färbbar (dual: jede Landkarte ...)

Angenommen, wir betrachten nur einfache Polygone mit:

$$\forall p \in P : \text{Fläche}(vis(p)) \geq \frac{1}{r} \text{Fläche}(P)$$

Mit wievielen Wächtern kommt man dann aus? (Etwa mit r?)

Sei $(X, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem (range space)

<u>Def</u>: $A \subseteq X$ wird von $\mathcal{F}$ zerschmettert $:\iff$

$$\mathcal{F}|_A = \{F \cap A \,;\, F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{P}(A)$$

<u>d.h.</u> $\mathcal{F}$ ist so reichhaltig, dass zu jedem $B \subseteq A$ ein $F \in \mathcal{F}$ existiert mit

$$B = F \cap A.$$

<u>Def</u>: Vapnik-Chervonenkis-Dimension von $(X, \mathcal{F})$

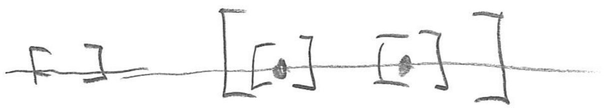
$\dim_{VC}(X, \mathcal{F}) = \dim_{VC}(\mathcal{F})$:= maximale Mächtigkeit einer Menge $A \subseteq X$, die von $\mathcal{F}$ zerschmettert wird

X klar

(→ statistischen Lerntheorie)

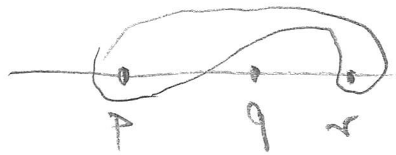
Beispiele: (i) $X = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{F}$: Menge aller abgeschlossenen Intervalle in $\mathbb{R}^1$

Beispiel für eine 2-elementige Menge, die zerschmettert wird



$\dim_{VC} = 2$

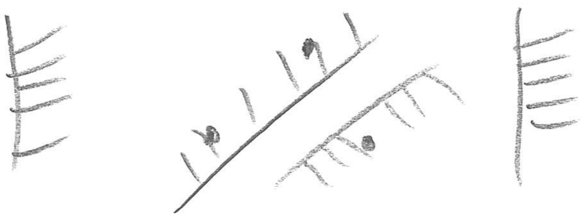
aber keine 3-elementige Menge wird zerschmettert:



klar: jedes Intervall, das p und r enthält, muß auch q enthalten

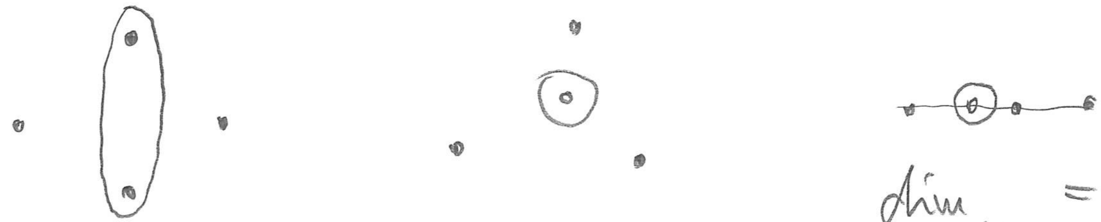
$\Rightarrow$ Teilmenge $\{p,r\}$ von $\{p,q,r\}$ ist kein Schnitt mit Intervall

(ii) $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$: Menge der abgeschlossenen Halbebenen



es gibt 3-elem. Mengen, die sich shattern lassen

aber es gibt keine 4-elementige Menge, ...



$\dim_{VC} = 3$

AlgGeo 12.4

man kann zeigen: $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}$: Menge der abgeschlossenen Halbräume

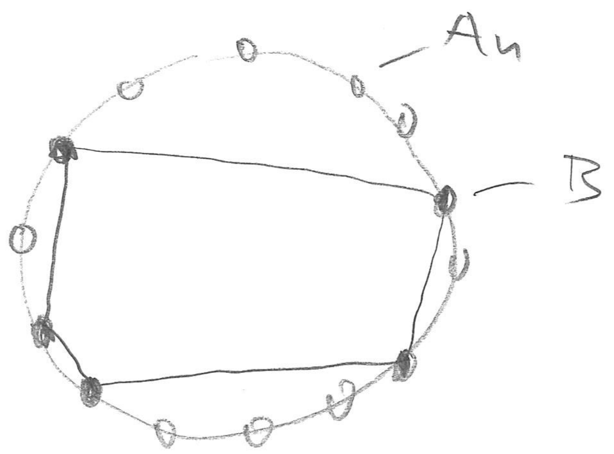
$$\Rightarrow \dim_{VC}(X, \mathcal{F}) = d+1$$

(iii) $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$: Menge aller konvexen Mengen im $\mathbb{R}^2$

Beh: Es gibt beliebig große Mengen, die zerschmettert werden

$$\Rightarrow \dim_{VC}(X, \mathcal{F}) = \infty$$

Bew: A_n: Menge von n regulären Punkten auf Einheitskreis



$$B = \underbrace{ch(B)}_{\substack{\cap \\ \mathcal{F}}} \cap A_n$$

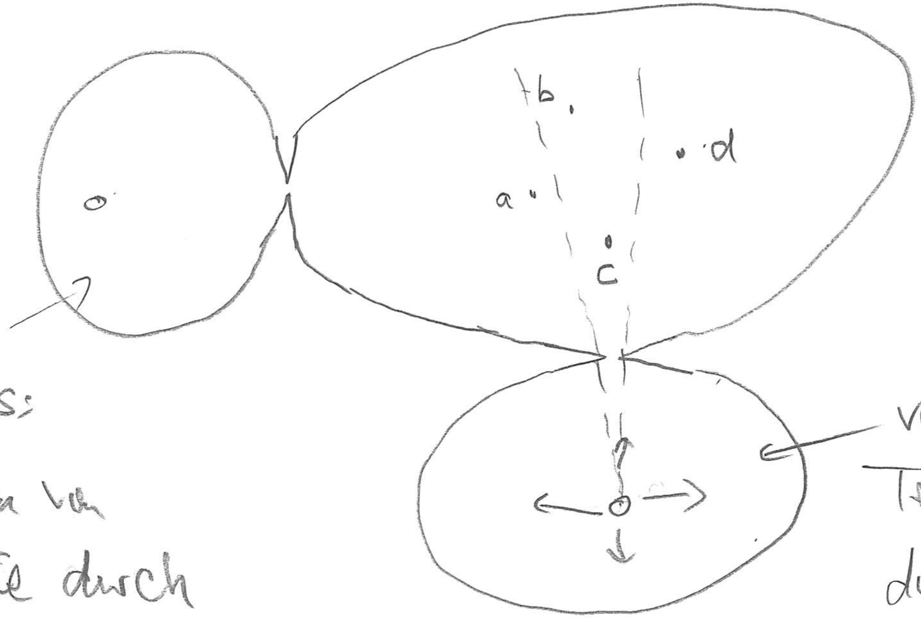
uns interessiert: X: einfaches Polygon

$\mathcal{F} = \{ vis(p) \,;\, p \in X \}$

$\dim_{VC}(X, \mathcal{F})$?

AlgGeo 12.5

es gibt einfaches Polygon X mit $\dim_{VC}(X, \mathcal{F}) \geq 4$



von hier aus:
alle Teilfolgen von bdac, die durch Verkürzung entstehen, insb.:
ac, ad, abd,
acd, bd 5 Stück

von hier aus sieht man jede Teilfolge, die sich aus abcd durch Verkürzung ergibt, d.h.
$\emptyset$, a, b, c, d, ab, bc, cd, abc, bcd, abcd
11 Stück

Potenzmenge!

Es gibt Beispiele mit $\dim_{VC}(X, \mathcal{F}) \geq 6$.

Alg Geo 12.6

Jetzt Theorem: $X, \mathcal{F}$ wie oben. Dann $\dim_{VC}(X, \mathcal{F}) \leq 25$
(Pavel Valtr, '98)

(A. Gilbers, TeK: ≤ 14)

D.h.: Man kann keine Galerie für 25 Exponate bauen, in der jede Besucherin einen Standort findet, von dem aus genau ihre Lieblingsobjekte sichtbar sind.

Beweis Intuition: Angenommen, $A = \{p_1, \ldots, p_m\}$ wird zerschmettert von den $vis(q)$ eines einfachen Polygons X.

Ansatz Zerlege X in Zellen mit

(i) ohne ∂X sehen alle Punkte derselben Zelle die Punkte aus A in derselben Reihenfolge

(ii) in Anwesenheit von ∂X sind die verschiedenen Sichten innerhalb einer Zelle lediglich Verkürzungen dieser Reihenfolge

(iii) Man benötigt nur poly(m) viele Zellen

AlgGeo 12.7

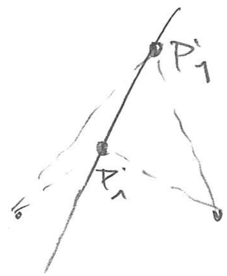
$\Rightarrow$ # genau sichtbaren Teilmengen von A

$\leq \underbrace{\#\,\text{Zellen}}_{\text{poly}(m)} \cdot \underbrace{\#\,\text{Verkürzungen einer festen Teilfolge}}_{\leq m^2} \leq \text{poly}'(m)$

Beispiel oben!

zu (i) wie? verwende alle Geraden $\ell(p_i, p_j)$ mit $1 \leq i < j \leq m$: $\binom{m}{2}$

"locus approach"



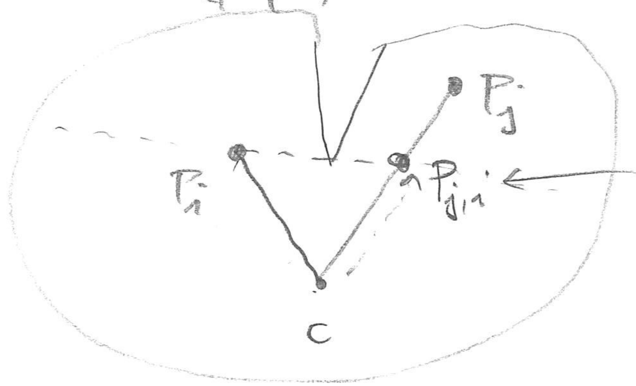
zusätzlich: sei $c \in X$ ein Punkt, der alle $p_i \in A$ sieht $\quad m$

füge alle Geraden $\ell(p_i, c)$ hinzu

zusätzlich $\forall\, 1 \leq i \neq j \leq m$

$\ell(p_i, p_{j,i})$

$(m-1)m$ viele



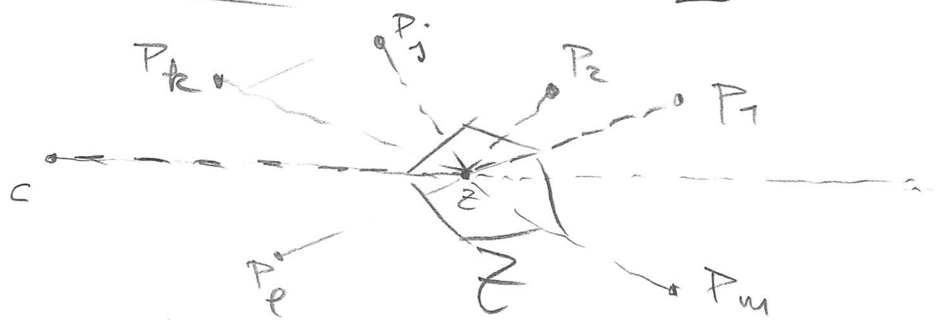
das am nächsten zu p_j gelegene Punkt auf cp_j, der p_i sehen kann

AlgGeo 12.8

haben insgesamt $\frac{1}{2}(3m^2-m)$ viele Geraden ausgewählt

Lemma Ein Arrangement aus k Geraden hat höchstens $\binom{k+1}{2}+1$ viele Zellen. (Ü; Euler: # Schnittpunkte $\in O(m^2)$)

Betrachte eine Zelle Z. Sei $z \in Z$



wollen zeigen: für die Punkte in Z gibt es bzgl. der Sichtbarkeit der p_i keine Lücken

Betrachte $w, w' \in Z$ und $p_j, p_k, p_l \in A$ mit $j \le k \le l$

und w sieht p_j und p_l, aber nicht p_k
w' sieht p_k } wollen ↯ erhalten.

Nach Konstruktion des Arrangements:

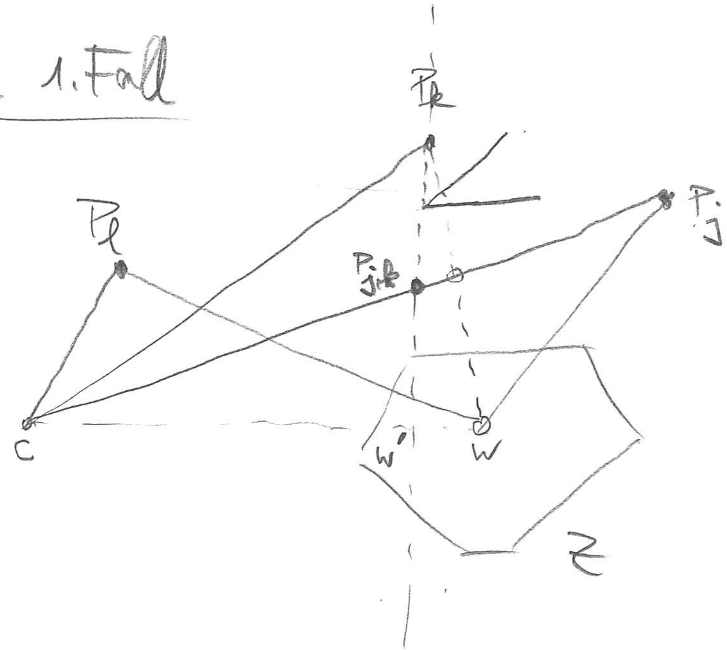
* ohne ∂X sehen alle Punkte in Z die p_i in derselben Reihenfolge
* keine Gerade $l(c, p_h)$ schneidet Zelle Z

AlgGeo 12.9

1. Fall: P_k liegt oberhalb von $l(c,z)$ $\Rightarrow$ P_j ebenfalls oberhalb
P_l irgendwo

2. Fall: P_k liegt unterhalb $\Rightarrow$ P_l ebenfalls unterhalb
P_j irgendwo

o.E. betrachte 1. Fall



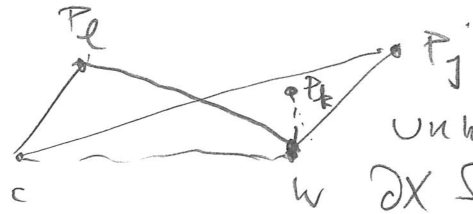
$l(P_k, P_{j,k})$ kann Zelle Z nicht schneiden

↯ $w', w \in Z$.

wissen: c sieht P_j

Beh: cP_j schneidet wP_k

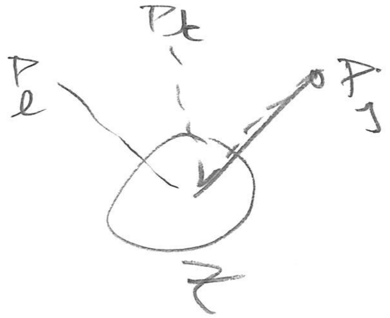
sonst



unmöglich, da ∂X Segment wP_k nicht unterbrechen kann

AlgGeo 12.10

<u>haben gerade gezeigt:</u>



$w_Q, w_{Q'} \in Z$

$$\left.\begin{array}{l} w_Q \text{ sieht } P_j, P_l \\ w_{Q'} \text{ sieht } P_k \end{array}\right\} \Rightarrow w_Q \text{ sieht } P_k \text{ auch} \quad (*)$$

wenden diese Tatsache an auf alle $Q \subset A$ mit $|Q| = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$

$w_Q \in Z$ sieht genau Q

$w_{Q'} \in Z$ sieht genau $Q' \neq Q$

wenn Q, Q' dasselbe kleinste Element besitzen, sind sie gleich wegen der Lückenfreiheit $(*)$

wegen $|Q| = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ muß das kleinste Element $\leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ sein

$\Rightarrow$ Z enthält höchstens $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ viele solche Punkte w_Q.

AlgGeo 12.11

Also. Angenommen, $A = \{p_1, \dots, p_m\}$ wird zerschmettert

$\Rightarrow$ es gibt $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}$ viele Punkte wie w_Q insgesamt

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}}_{\text{exponentiell in } m} \leq \# \text{ Zellen} \cdot \underbrace{\lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor}_{\# w_Q \text{ pro Zelle}} \leq \underbrace{\left(\binom{\frac{1}{2}(3m^2 - m) + 1}{2} + 1 \right)}_{\text{poly}(m)} \cdot \lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor$$

wird falsch für $m \geq 26$.

$\boxed{\text{Thm}}$