AlgGeo 17.1

5.2 Voronoi-Diagramme

Idee: Gegeben: Raum M, darin n Objekte (Sites)
Objekte üben Einfluß aus
Aufgabe: Fasse die $x \in M$ in Regionen zusammen
für das Objekt mit maximalem Einfluß gleich ist.

Voronoi-Diagramme hier: Raum: $\mathbb{R}^2$,
Objekte: Menge S von n Punkten $p, q, r, \ldots$
Einfluß: $\dfrac{1}{\text{euklidischer Abstand}}$

Definition $p \neq q$

$\sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - q_2)^2}$: L_2
euklidischer Abstand

$$D(p,q) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \, ; \, |xp| < |xq| \}$$

$$B(p,q) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \, ; \, |xp| = |xq| \}$$ Bisektor von p und q
(bzgl. L_2)

AlgGeo 17.2

R Descartes
Principia Philosophiae
Ludovicus Elzevirius
Amsterdam, 1644

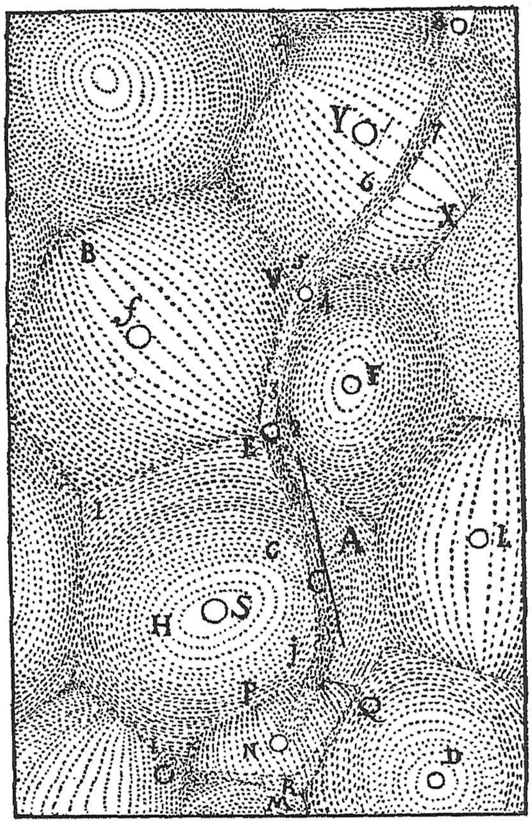


Abb. 5.1 Die Zerlegung des Sonnensystems in Wirbel nach Descartes.

Shamos, Hoey
Closest-point Problems
FOCS 1975
* Comp-Geom.

VoroGlide

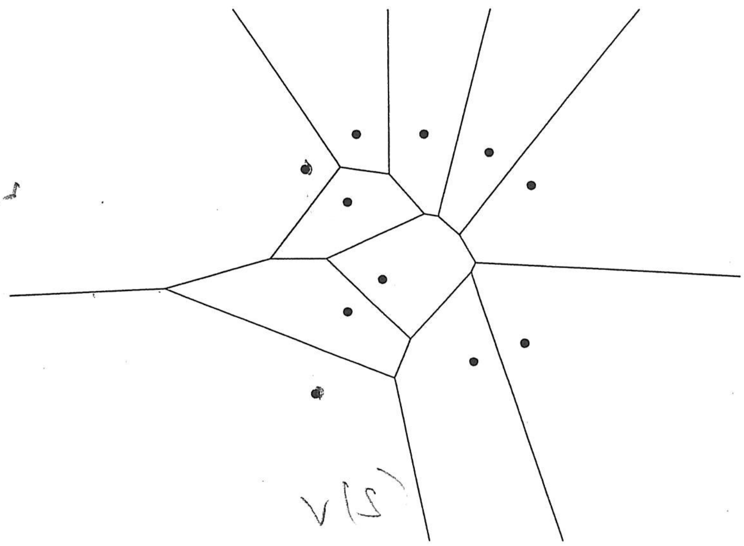


Abb. 5.2 Ein Voronoi-Diagramm von elf Punkten.

AlgGeo 17.3

S: eine Menge von n Punkten im $\mathbb{R}^2$

$$VR(p,S) := \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p,q)$$

Menge aller $x \in \mathbb{R}^2$, die p als eindeutigen nächsten Nachbarn in S haben

Voronoi-Region von p bzgl. S

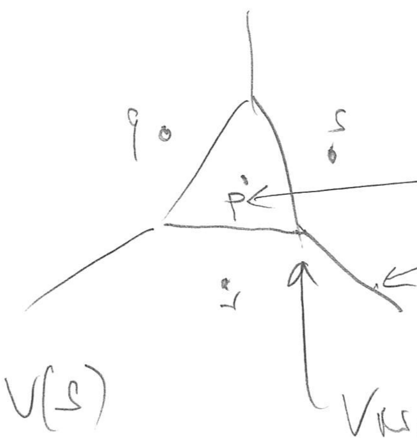
als Schnitt offener Halbebenen: offen, konvex

$$V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{p \in S} VR(p,S)$$

Menge aller $x \in \mathbb{R}^2$ mit zwei oder mehr nächsten Nachbarn in S

Voronoi-Diagramm von S.

$S := \{p, q, r, s\}$



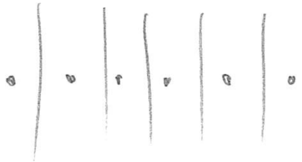
Voronoi-Region $VR(p,S)$

Voronoi-Kante; unbeschränkt
innere Kantenpunkte haben r, s als nächste Nachbarn

Voronoi-Knoten: ≥ 3 nächste Nachbarn in S
hier: p, r, s

AlgGeo 17.4

Bsp:



spezielle Lage;

falls S in allgemeiner Lage:

$V(S)$ zusammenhängend

jeder Voronoi-Knoten hat Grad $= 3$

Struktur

Lemma 5.1 Sei $x \in \mathbb{R}^2$, $C(x)$ Kreis mit Zentrum x, dessen Radius von 0 wächst.

$C(x)$ trifft zunächst nur auf $p \in S$: $x \in VR(p,S)$

" $p,q \in S$: x innerer Punkt der Voronoi-Kante zwischen $VR(p,S)$ und $VR(q,S)$

" $p_1,\dots,p_k$, $k \geq 3$: x Voronoi-Knoten, an dem die Regionen $VR(p_1,S),\dots,VR(p_k,S)$ zusammentreffen.

(exakte Beweise: Buch)

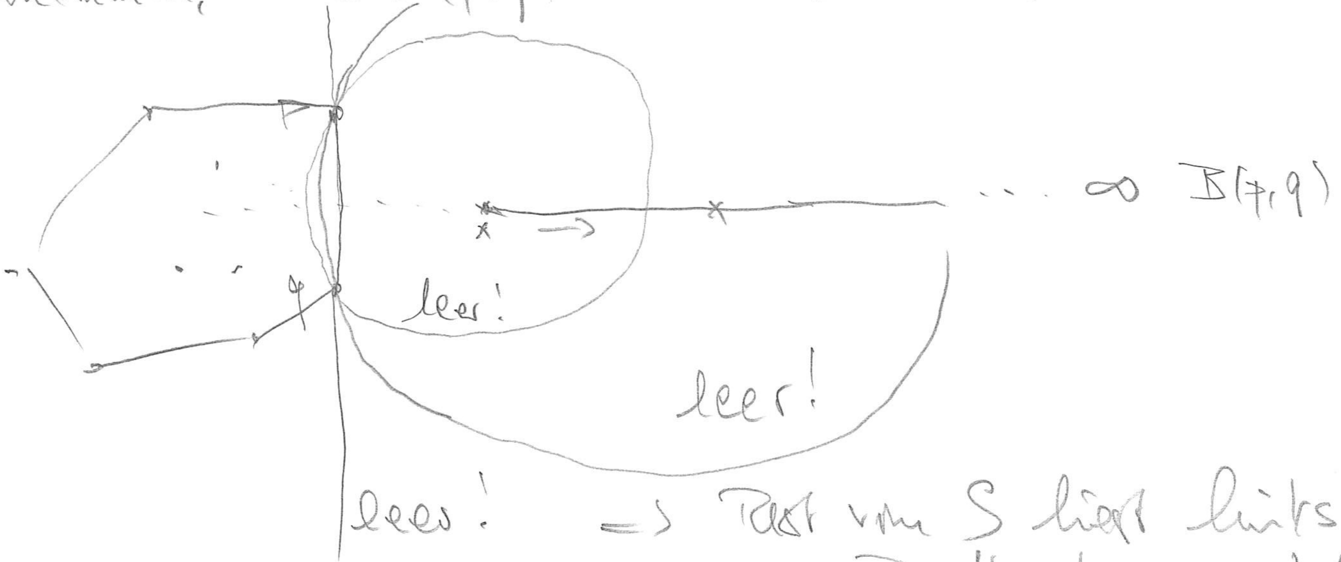
Lemma 5.2 $VR(p,S)$ unbeschränkt $\Longleftrightarrow$ p Ecke von $ch(S)$

Bew: Wir zeigen: $e \subseteq B(q,p)$ ist unbeschränkte Voronoi-Kante

$\Longleftrightarrow$ Segment $\overline{pq}$ Kante auf $\partial ch(S)$

AlgGeo 17.5

angenommen, $e \subset B(p,q)$ ist unbeschränkte Voronoi-Kante



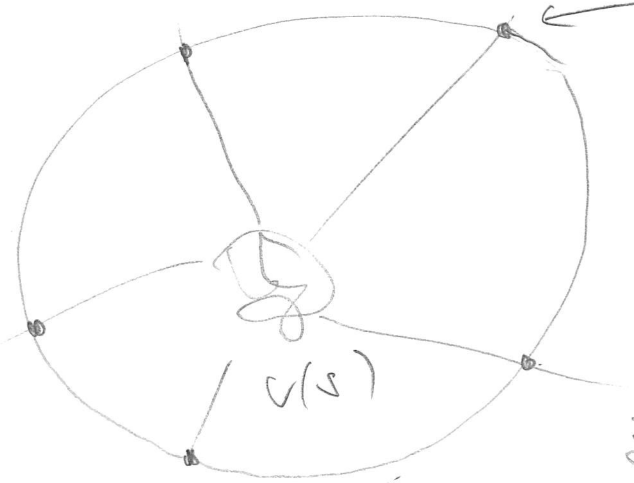
$\Rightarrow$ Rest von S liegt links $\ell(p,q)$

$\Rightarrow$ pq Randkante von $ch(S)$

$\boxed{\text{Lemma 5.2}}$

Rückrichtung: ebenso

$V(S)$ als planarer Graph



Knoten mit Grad ∞

neuen Knoten und Kanten:

$\leq$ # unbeschränkten Kanten in $V(S)$

jetzt: planarer Graph mit Knotengrad ≥ 3

$\Rightarrow$ # Knoten, # Kanten $\in O($# Flächen$)$

Euler $\qquad\qquad\qquad\qquad n+1$

AlgGeo 17.6

Also: $V(S)$ für $|S| = n$ hat $O(n)$ Knoten, Kanten, Flächen.

Thm 5.3 Rand einer Voronoi-Region hat im Mittel < 6 Kanten

Thm 5.4 $V(S) \xrightarrow{O(n)} ch(S)$ Anwendungen

Korollar 5.5 Berechnung von $V(S)$: $\Omega(n \log n)$ (geht das auch?)

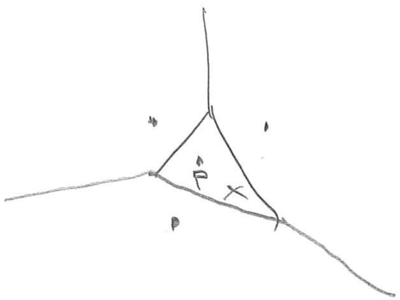
Post Office Problem : Gegeben: n Punkte S im $\mathbb{R}^2$ (Postämter)

x Query-Punkt

Frage: Bestimme das zu x nächste Postamt.

Ansatz: locus Approach : fasse alle $x \in \mathbb{R}^2$ zu einer Region zusammen, für die die Antwort dieselbe

$= $ Voronoi-Region $VR(p, S)$

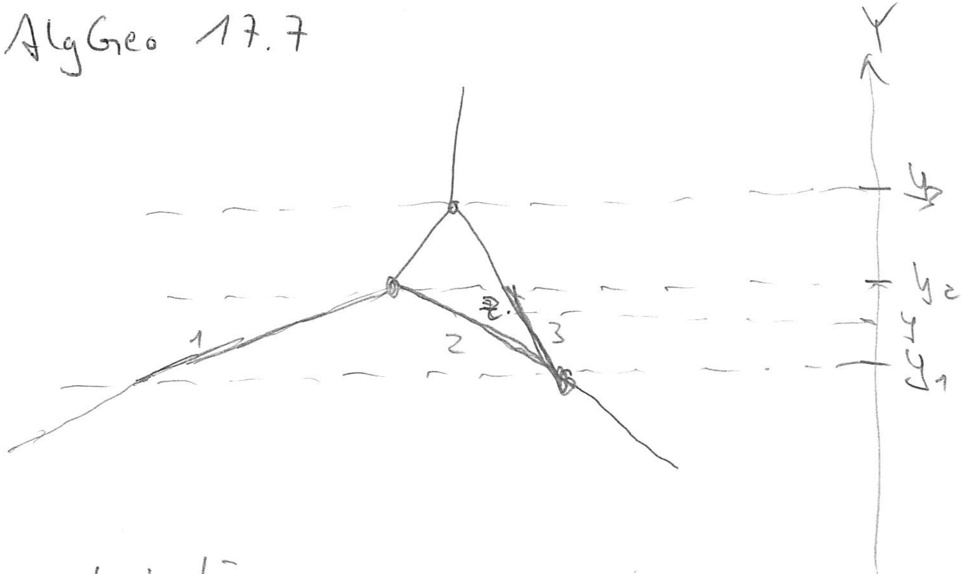


bleibt festzustellen: in welcher Voronoi-Region liegt der Query-Punkt x ?

$\longrightarrow$ "Point location"

hier: naive Lösung:

AlgGeo 17.7



Zeichne horizontale Geraden durch die Voronoi-Knoten

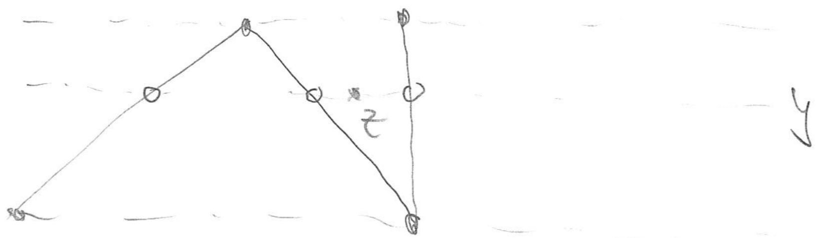
$\longrightarrow$ $O(n)$ parallele Streifen

<u>Beobachtung</u>: im Innern eines Streifens erscheinen die Kantensegmente von links nach rechts sortiert (da keine Kreuzungen)

Lokalisierung von $z = (x, y)$: (i) binäre Suche nach y in der Liste der Streifenränder

$\longrightarrow$ Streifen, der z enthält $\quad O(\log n)$

(ii) binäre Suche nach z in den Kantensegmenten dieses Streifens



suche nach x in der Liste der Schnittpunkte der Segmente mit horizontaler Geraden durch z.

$O(\log n)$

<u>Problem</u>: „lange" Voronoi-Kanten können viele Streifen schneiden und deshalb zu zahlreichen Kantensegmenten führen

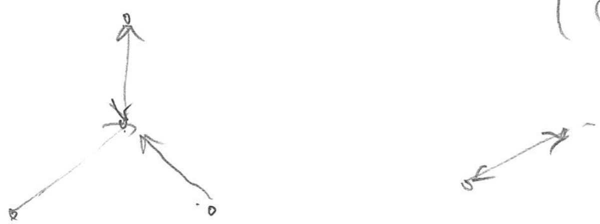
Konstruktionszeit, Speicherplatz: $\sim n^2$

AlgGeo 17.8

Thm 5.6 Aus $V(S)$ kann man in Zeit und Platz $O(n^2)$ eine Struktur für Point Location bauen, mit der sich das Post Office-Problem in Zeit $O(\log n)$ pro Anfrage beantworten läßt.

(Später: besser Trapez-Zerlegung)

Alle nächsten Nachbarn: Zu jedem p aus S bestimme seinen nächsten Nachbarn $q \in S$ (allgemeine Lage)



Wald.

(Dichtestes Paar: Teilproblem)

Lemma 5.7 Sei $S = \underset{p_0}{\underset{\cup}{P}} \mathbin{\dot\cup} \underset{q_0}{\underset{\cup}{Q}}$, und sei $|p_0 q_0| = \min\{|pq|;\ p \in P,\ q \in Q\}$

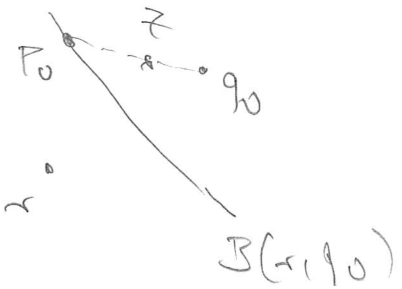
Dann: $VR(p_0, S)$ und $VR(q_0, S)$ haben gemeinsame Voronoi-Kante, die von $p_0 q_0$ gekreuzt.

Bew: sonst: p_0 — z — q_0, $z \in VR(r, S)$

$$\Rightarrow |p_0 r| \underset{\triangle}{\le} |p_0 z| + |z r| \underset{r \text{ nächster Nachbar von } z}{\le} |p_0 z| + |z q_0| = \underset{\underset{|p_0 r|}{\text{|| min.}}}{|p_0 q_0|}$$

O.E. $r \in Q$

AlgGeo $\overset{17.9}{\Longrightarrow}$ überall "$=$" $\Longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} |zr| = |zq_0| \\ |p_0 r| = |p_0 q_0| \end{array}\right\} \Longrightarrow z, p_0 \in B(r, q_0)$



↯ $z \in \overline{p_0 q_0}$ innerer Punkt

$\Rightarrow z \notin B(r, q_0)$. $\boxed{\text{Lemma 5.7}}$

Theorem 5.9: Aus $V(S)$ lassen sich alle nächsten Nachbarn in S in Zeit $O(n)$ berechnen.

Beweis: Sei $p \in S$; $P := \{p\}$, $Q := S \setminus \{p\}$

wende Lemma 5.7 an: der nächste Nachbar q von p teilt sich eine Voronoi-Kante mit q in $V(S)$

$\Rightarrow$ genügt, Abstände von p zu den Besitzern der Nachbarregionen zu betrachten und das Minimum zu wählen.

Gesamtaufwand: $2 \times \#$ Voronoi-Kanten

$\in O(n)$ $\boxed{\text{Thm 5.9}}$

AlgGeo 17.10

Minimaler Spannbaum von S: (in Graph $G=(V,E)$ mit Kantengewichten ≥ 0)

Kruskal:
- sortiere Kanten nach aufsteigenden Gewichten
- unterhalte Wald, beginnend mit einzelnen Knoten $\in V$

- betrachte die nächstgrößere Kante e:
  - nimm e hinzu, falls e zwei verschiedene Teilbäume verbindet
  - sonst ignoriere e

Laufzeit: $O(|E| \cdot \log |E|)$

Bei uns: kein Graph gegeben, sondern Menge von Punkten.

Naiv: Kruskal anwenden auf den vollständigen Graphen der Punkte

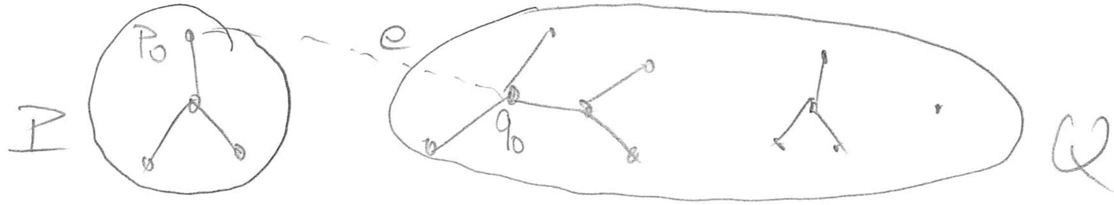
$\binom{n}{2} \in \Theta(n^2)$ Kanten

$\rightsquigarrow$ Laufzeit $O(n^2 \log n)$

Alg Geo 17.11

Beobachtung: Die Kanten des MST verbinden Punkte aus S mit benachbarten Voronoi-Regionen!

Grund: Lemma 5.7: Wenn Kruskal Kante $e=(p_0, q_0)$ einfügt,



ist $p_0 q_0$ ein dichtestes P/Q-Paar

Thm. 5.11 $\quad V(S) \xrightarrow{O(n)} MST(S)$