AlgGeo 18.1 (a)

Anwendungen V(S): $V(S) \xrightarrow{O(n)} MST(S)$

Es kann "kürzere" Bäume als MST geben, die zusätzliche "Steiner-" Punkte verwenden.

Bsp:

MST: 2 Steinerbaum: $\sqrt{3}$

Fermat-Torricelli; alle 3 Winkel 120°

optimaler Steiner-Baum: NP-hart

Anwendung MST: Travelling Salesperson im $\mathbb{R}^2$

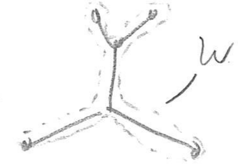
Gegeben: Menge S von n Punkten

Gesucht: Kürzeste Rundtour OPT durch S

NP-hart

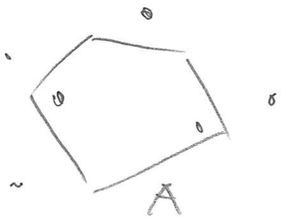
Approximation: Sei e Kante von OPT $\Rightarrow$ OPT $\setminus \{e\}$ Kette, die S verbindet, also auch ein Baum

$$\Rightarrow \quad |MST(S)| \leq |OPT(S) \setminus \{e\}| < |OPT(S)|$$

MST: 

$$\Rightarrow \quad W = 2|MST(S)| < 2|OPT(S)|$$

5.3.4 Größter leerer Kreis



Gegeben: konvexes Polygon A, m Kanten

S: Menge von "Störquellen", n Stück

Gesucht: Punkt $p \in A$ mit maximalem Abstand zu den Punkten in S

$\hat{=}$ größter leerer Kreis mit Zentrum $x \in A$

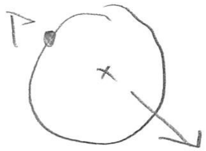
starte mit $x \in A$, vergrößere Kreis $C(x)$, bis

- $C(x)$ trifft auf 3 Punkte in S: $\Rightarrow$ x Knoten in V(S)
- $C(x)$ trifft auf 2 Punkte p, q in S: $\Rightarrow$ x liegt auf Kante von V(S)

bewege x längs $B(p,q)$ so, daß $C(x)$ wächst

bis dritter Punkt $\in S$ getroffen (s.o.)
oder bis ∂A erreicht $\Rightarrow$ x Schnitt von Voronoi-Kante mit ∂A

– $c(x)$ trifft auf einen Punkt $p \in S$: bewege x so, daß $C(x)$ wächst, bis



ein zweiter Punkt getroffen (s.o.)
eine Ecke von ∂A erreicht $\Rightarrow$ x ist Ecke von ∂A

Ansatz: inspiziere diese Kandidaten:
bestimme für jeden den Abstand zur nächstgelegenen Störquelle
wähle das Maximum

- Voronoi-Knoten in A
- Schnitte von Voronoi-Kanten mit ∂A ✓
- Ecken von ∂A ✓

zuerst!

Technik "Verfolge Rand von A durch das Voronoidiagramm $V(S)$"

Initialisierung: Bestimme für einen Eckpunkt a_1 von A die Region $VR(p,S)$, in der sie liegt. brute force: $O(n)$

berechne den Treffer h vom Strahl von a_1 durch a_2 auf $\partial VR(p,S)$ brute force: alle Kanten von $VR(p,S)$ absuchen $O(n)$

1. Fall: h liegt hinter a_2:
berechne Treffer h' vom Strahl von a_2 durch a_3 auf $\partial VR(p,S)$ laufe von h aus weiter $\partial VR(p,S)$ entlang, bis h' gefunden
usw., falls 1. Fall sich wiederholt.

$\boxed{\text{verwendet: } A \text{ konvex}}$

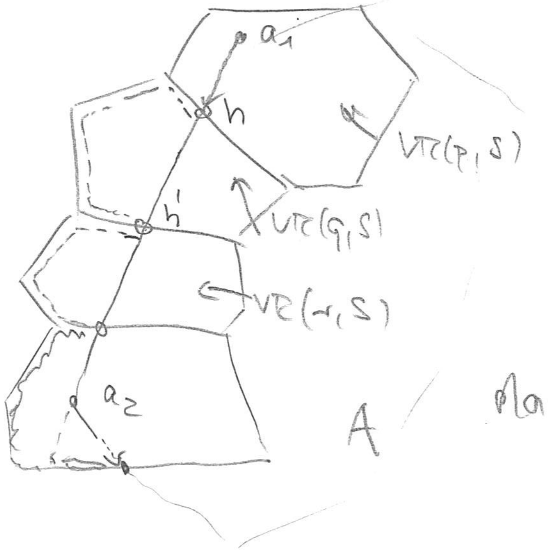
Alg Geo 18.3

(c)

2. Fall: h liegt vor a_2:

Suche nach Treffpunkten der Strahlen:

gegen den Uhrzeiger auf den Rändern der Voronoi-Regionen



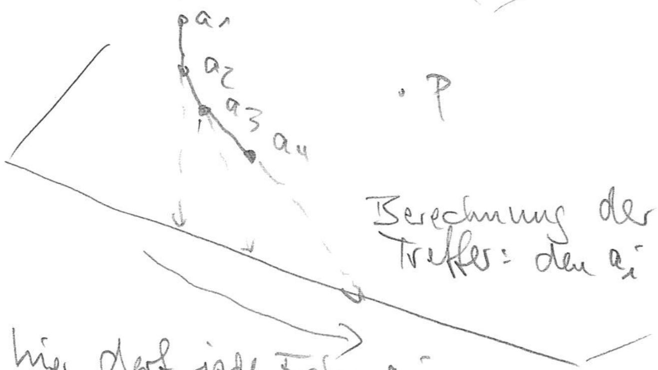
∂A wechselt in h von $VR(p,S)$ in $VR(q,S)$

berechne Treffer h' vom Strahl von a_1 durch a_2 mit $\partial VR(q,S)$,

usw. bis Ecke a_2 gefunden;

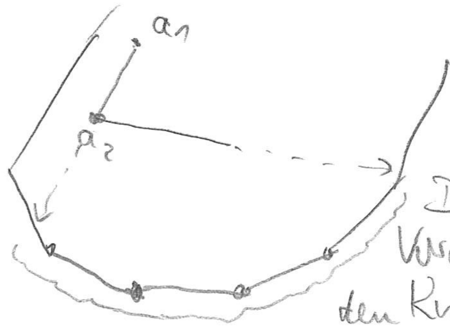
dann weiter wie oben

Dabei wird kein Randstück 2x durchlaufen!



Berechnung der Treffer: den a_i anlasten

hier darf jede Ecke a_i nur 1 Strahl schießen

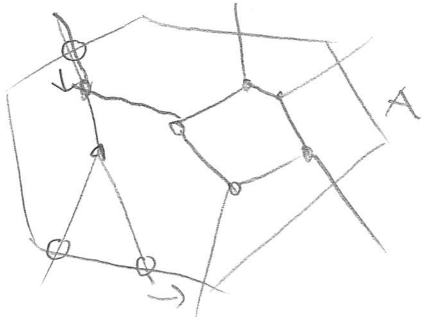


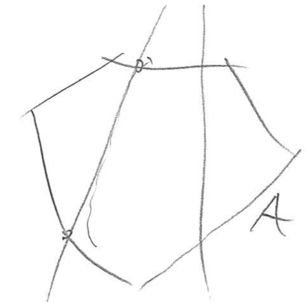
Durchlauf durch Voronoi-Knoten: den Knoten anlasten

jeder Knoten zahlt nur 1X

Theorem 5.17 Zentrum des größten leeren Kreises im konvexen Polygon A mit m Ecken in Anwesenheit von n Punkten S: Aus V(S) in Zeit $O(n+m)$.

kleiner Nachtrag: Testen aller Voronoi-Knoten in A ✓



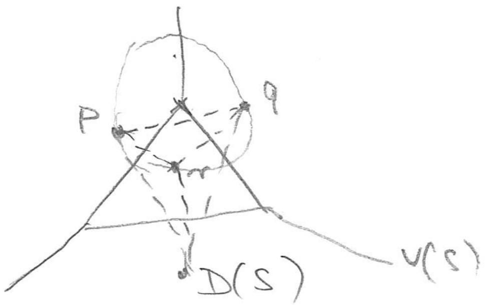


AlgGeo 18.4

Delaunay-Triangulation $D(S)$

S in allgemeiner Lage $\Rightarrow$ alle Voronoi-Knoten in $V(S)$ haben Grad 3 (d)

Def: $D(S) := V(S)^*$



$V(S) \overset{O(n)}{\longleftrightarrow} D(S)$

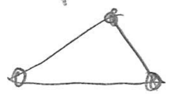
Thm 5.11 $MST(S) \subset D(S)$

p, q, r bilden ein Dreieck von $D(S)$ $\Leftrightarrow$ Umkreis von p, q, r enthält keinen Punkt aus S.
denn: Zentrum vom Umkreis ist Voronoi-Knoten von $V(S)$

p, q bilden Kante von $D(S)$ $\Leftrightarrow$ es gibt einen Kreis durch p und q, der keinen anderen Punkt von S enthält.

Allgemein: Triangulation einer Punktmenge S: Maximale Menge sich nicht kreuzender Liniensegmente mit Endpunkten in S. (Die Kanten von $ch(S)$ sind immer dabei!)

Ü/Lemma: Sei $r :=$ # Kanten von $ch(S)$. Dann hat jede Triangulation von S genau $2(n-1)-r$ viele Dreiecke.



✓

Bew: Euler: $\underset{\overset{\shortparallel}{n}}{v} - e + f = 2 \Rightarrow e = n + (f-1) - 1$

$$\cancel{3}\underbrace{(f-1)}_{\#\text{Dreiecke}} = 2e - r = 2n + \cancel{2(f-1)} - 2 - r$$

$$\Rightarrow \quad f-1 = 2n-2-r$$

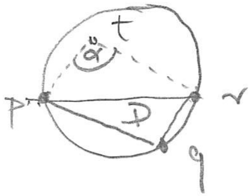
AlgGeo 18.5. (e)

Sei T Triangulation von S, $w(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3d})$, $d = \#$ Dreiecke, sei die aufsteigend sortierte Folge aller Winkel in T

Theorem: $w(D(S))$ maximal bezüglich der lexikographischen Ordnung auf den $w(T)$

Beweis: Sei $T \neq D(S)$ eine Triangulation von S. Wir zeigen: Man kann T in Triangulation T' überführen mit $w(T) < w(T')$.

Sei $T \neq D(S)$ $\Rightarrow$ es gibt Dreieck $D = \mathrm{tria}(p,q,r)$



mit Punkt t im Umkreis

sei α der Winkel, unter dem t "seine" Kante von D sieht; unter allen diesen Konfigurationen sei (D,t) eine mit maximalem Winkel α.

Klar: pr ist keine Kante von $ch(S)$ (wegen t und q). Beh: $\mathrm{tria}(p,r,t)$ ist auch ein Dreieck von T!

Bew: Sonst gibt es s oberhalb von pr mit $\mathrm{tria}(p,r,s)$ gehört zu T.

α maximal $\Rightarrow s \notin C(p,r,t)$

$\Rightarrow t \in C(p,r,s)$

denn sonst sähe s eine Seite von $\mathrm{tria}(p,r,t)$ im Winkel $> \alpha$

$\Rightarrow$ t sieht ps oder sr unter Winkel $> \alpha$ und liegt im Umkreis von $\mathrm{tria}(p,r,s) \in T$ ↯ Maximalität von α. $\boxed{\text{Beh}}$

Schieße Strahl von q durch t zum Punkt $\tilde{t}$ auf $C(p,q,r)$; betrachte die eingezeichneten Winkel.

1.) Gleich benannte Winkel sind gleich

2.) $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_2 > \beta_2$, $\alpha_3 < \beta_3$, $\alpha_4 < \beta_4$

AlgGeo 18.6

(F)

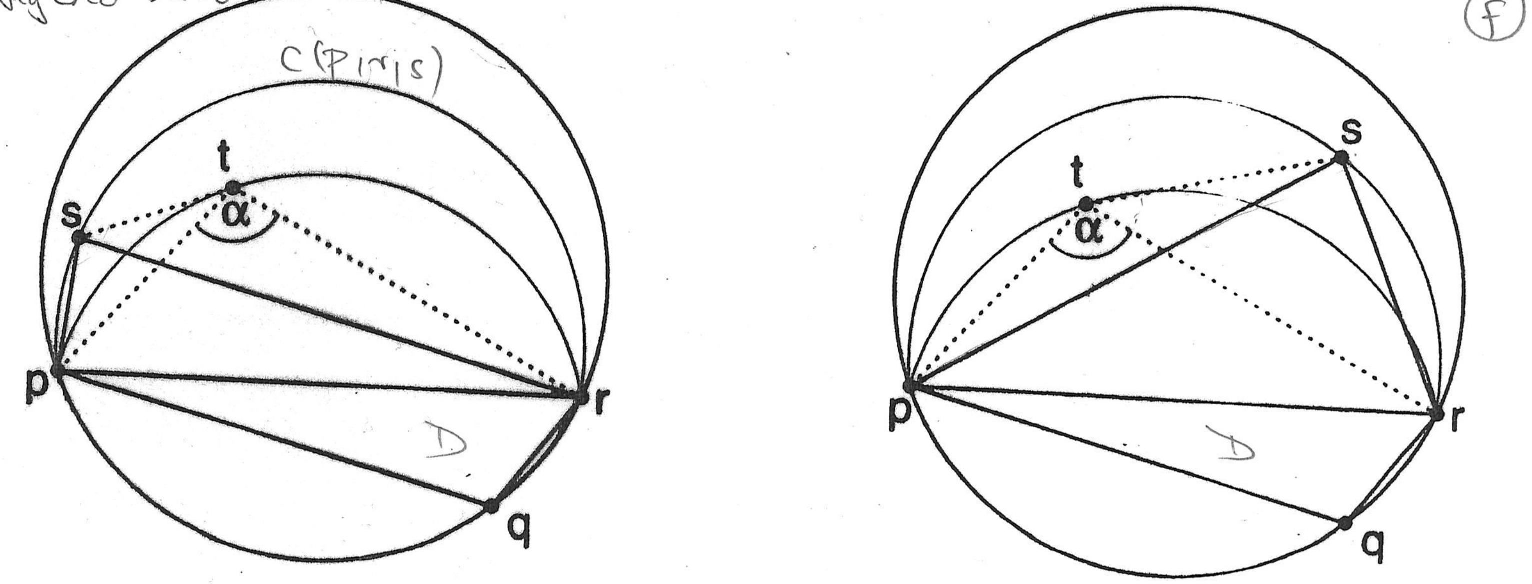


Abbildung 5.17: Der Winkel zwischen *ts* und *tr* bzw. zwischen *tp* und *ts* ist größer als α.

Jetzt: $T \xrightarrow[\text{edge flip}]{} T'$: ersetze Kante pr durch qt

~~89~~

9

vorher: $\beta_1, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_3+\beta_4$

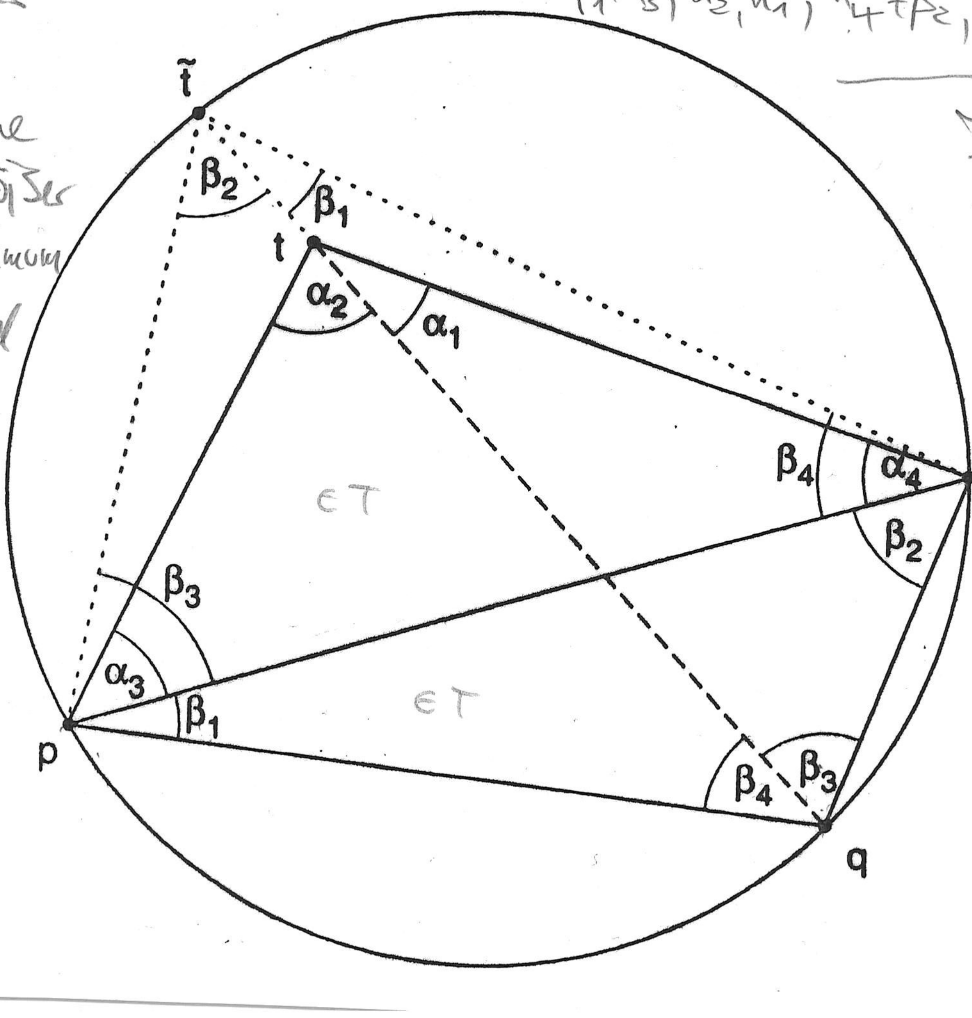
nachher: $\beta_1+\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_4+\beta_2, \beta_3, \beta_4$

Jeder neue Winkel ist größer als ein alter!

=> jeder neue Winkel ist größer als das Minimum der alten Winkel

=> Minimum wird größer!

$\boxed{\text{Ende}}$



Theorem

Je zwei Triangul. von S gehen durch edge flips auseinander hervor!