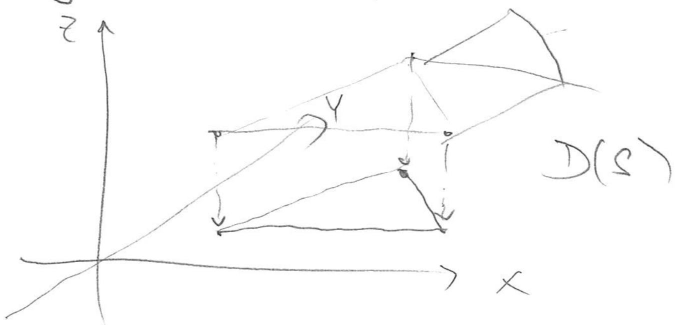
AlgGeo 19.1

Delaunay-Triangulation: $D(S)$

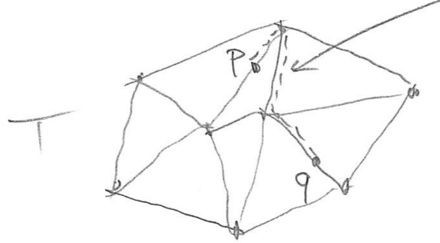
<u>Theorem</u> maximiert die kleinsten Winkel

<u>Anwendungen</u> (1) CAD/CAM: Rekonstruktion von Flächen aus Sample-Punkten



$\pi(p,q)$ = kürzester Weg von p nach q in T

(2)



Gegeben: Straßennetz Triangulation T

$$\delta(T) := \max_{p,q \in T} \frac{|\pi(p,q)|}{|pq|}$$ (geometrische) Dilation von T

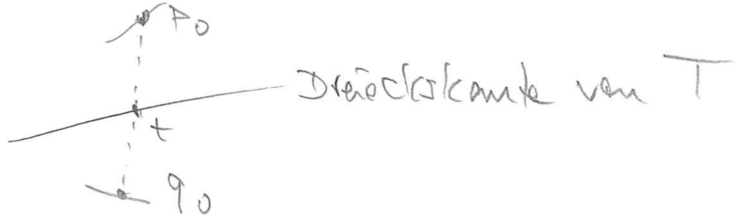
<u>Theorem</u> Unter allen Triangulationen einer Punktmenge S hat $D(S)$ die kleinste geometrische Dilation.

<u>Bew:</u> Sei T beliebige Triangulation von S, sei $\delta(T) = \frac{|\pi(p_0,q_0)|}{|p_0 q_0|}$ wobei $|p_0 q_0|$ minimal

<u>Beh:</u> Dann liegen p_0, q_0 auf dem Rand <u>eines</u> Dreiecks von T

AlgGeo 19.2

Bew: Sonst



$\delta(T) \quad \overset{\vee\!\!|}{} \quad \delta(T)$

$$\delta(T) \underset{\text{Def}}{=} \frac{|\pi(p_0,q_0)|}{|p_0q_0|} \le \frac{|\pi(p_0,t)| + |\pi(t,q_0)|}{|p_0t| + |q_0t|} \le \max\left(\frac{|\pi(p_0,t)|}{|p_0t|}, \frac{|\pi(t,q_0)|}{|tq_0|}\right) \le \delta(T)$$

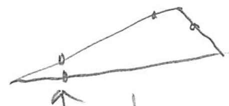
denn: $\dfrac{|\pi(p_0,t)|}{|p_0,t|}, \dfrac{|\pi(t,q_0)|}{|tq_0|} \le C$

$\Rightarrow |\pi(p_0,t)| + |\pi(t,q_0)| \le C\,|p_0t| + C\cdot|tq_0|.$

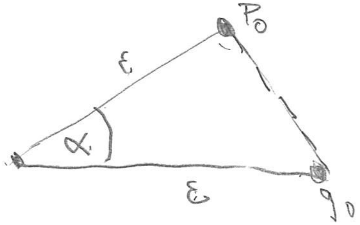
$\Rightarrow \dfrac{|\pi(p_0,t)|}{|p_0t|} = \delta(T)$ oder $\dfrac{|\pi(q_0,t)|}{|q_0t|} = \delta(T)$ $\quad$ ↯

kleiner!

$\Rightarrow p_0, q_0$ auf Rand desselben Dreiecks von T:



haben maximale Dilation, weil Winkel minimal



$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Dilation zwischen p_0, q_0

$\boxed{\text{Also: } D(S) \text{ hat unter allen Triangulationen von } S \text{ minimale geometrische Dilation}}$

AlgGeo 14.3

Aber: ① Es kann Graphen mit geraden Kanten geben, die kleinere Dilation als D(S) haben:

– stets: $\delta(DT(S)) \geq 2$, denn es gibt immer Winkel $\leq 60°$

$\frac{1}{\sin 30°} = 2$

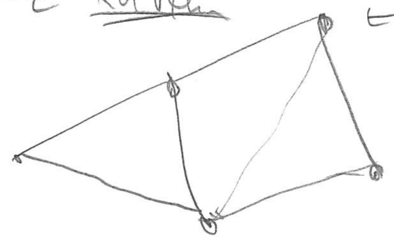
– z.B.

im Limes: $\frac{\frac{2\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} < 2$

"Spanner"

(statt geometrischer Dilation: alle Punkte

graphentheoretische Dilation: nur die Knoten



)

② D(S) minimiert nicht die Gesamtlänge aller Kanten

Minimum Weight Triangulation: NP-hart (Mulzer, Rote)

AlgGeo 19.4

Berechnung $\quad V(S) \xleftrightarrow{O(n)} D(S)$

$$V(S) \xrightarrow{O(n)} ch(S)$$

?

Theorem 6.1 (Djidjev, Lingas '91) Angenommen, die n Punkte in S sind schon nach X-Koordinaten sortiert. Dann braucht die Konstruktion von $V(S)$ immer noch $\Omega(n \log n)$ Zeit im worst case.

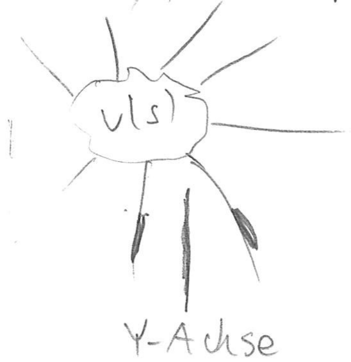
Bew: Wir zeigen: $\underset{\text{vorsortiertes } S}{V(S)} \xrightarrow{O(n)} \varepsilon$-Closeness

Seien gegeben: $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Frage: Gibt es $i \neq j$ mit $|y_i - y_j| < \varepsilon$?

Definiere (in $O(n)$ Zeit) Punkte $p_i := \left(\frac{i\varepsilon}{n}, y_i\right)$, $\quad 1 \leq i \leq n$

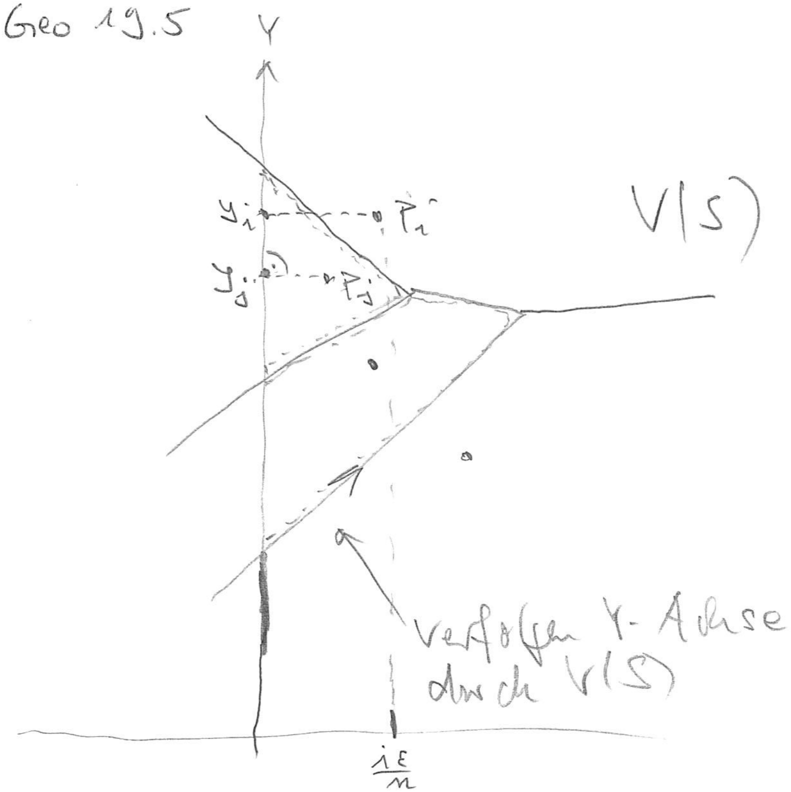
nach X vorsortiert! $\quad S := \{p_1, \ldots, p_n\}$

Berechne $V(S)$, verfolge die Y-Achse von unten durch $V(S)$



findet man in $O(n)$ Zeit

Alg Geo 19.5



Teste, ob für jedes j
die Projektion $(0, y_j)$ von p_j auf Y-Achse
in $VR(p_j, S)$ enthalten ist

falls ja: Y-Achse besucht jede Voronoi-Region
$\Rightarrow$ wir kennen die Reihenfolge der y_j auf Y-Achse
$\Rightarrow$ können kleinsten Abstand konsekutiver y in Zeit $O(n)$ bestimmen.

falls nein: (dann gibt es Punkte wie p_i im $P_J(d)$)
mit $(0, y_i) \in VR(p_j, S)$ mit $j \neq i$ (*)

$$|y_i - y_j| \leq |(0, y_i) p_j| \underset{(*)}{<} |(0, y_i) p_i| = \frac{i\varepsilon}{n} \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Antwort auf ε-closeness-Test heißt "ja". $O(n)$ $\boxed{\text{Thm 6.1}}$

Folgerung: $V(S) \xrightarrow{O(n)} ch(S) \xleftrightarrow{O(n)}$ Sortieren

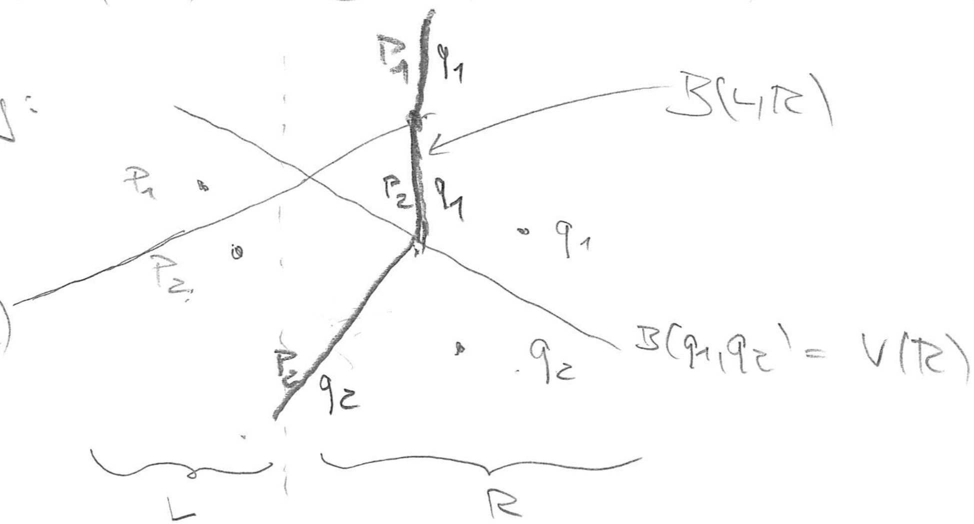
$O(n)$ ~~X~~

AlgGeo 19.6

Jetzt: $V(S)$ mit D&C (nach Shamos/Hoey '75)

D&C:
(i) Teile S durch Senkrechte (oder Waagerechte) in zwei etwa gleich große Teile L und R
(ii) Berechne rekursiv $V(L)$ und $V(R)$
! → (iii) Setze $V(L)$ und $V(R)$ zu $V(S)$ zusammen.

Vorüberlegung:



$S = L \cup R = \{p_1, p_2, q_1, q_2\}$

Was fehlt noch an $V(S)$? Voronoi-Kanten zwischen L- und R-Regionen

formal: $B(L,R) := \{ z \in \mathbb{R}^2 ; \min_{p \in L} |pz| = \min_{q \in R} |qz| \}$

alle Punkte der Ebene mit ≥2 nächsten Nachbarn in S, von denen einer in L und einer in R liegt

Alg Geo 19.7

Lemma 6.13 L, R durch Senkrechte separiert $\Rightarrow$ $B(L,R)$ ist eine Y-monotone polygonale Kette

Bew: sei $p \in L$, $q \in R$ $\Rightarrow$ Segment von $B(p,q)$ kann nicht waagerecht sein

stets: p links, q rechts

$\Rightarrow$ $B(L,R)$ kann keine Zyklen enthalten

$\Rightarrow$ $B(L,R)$ kann nur aus Y-monotonen Ketten bestehe

Also

$\Rightarrow$ es gibt nur 1 Kette in $B(L,R)$

(iii) Zusammensetzen von $V(L)$ und $V(R)$

– Berechnung von der Kette $B(L,R)$

(a) finde Halbgerade im Unendlichen

(b) verfolge sie simultan durch $V(L)$ und $V(R)$

$O(n)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{– Abschneiden der "überstehenden" Kanten von } V(L) \text{ und } V(R) \\ \text{– Vernähen der Schnittränder} \rightsquigarrow V(S) \end{array} \right.$

AlgGeo 19.8

(a) Suche Haltgerade von $B(L,R)$ im Unendlichen

— es muß genau 2 davon geben

— jede von ihnen muß in unbeschränktem Durchschnitt von Regionen $VR(p,L)$ und $VR(q,R)$ liegen

Wie findet man das?

Simultaner Umlauf durch die unbeschränkten Regionen von $V(L)$ und $V(R)$; jedesmal testen:

liegt der Bisektor der Regionsbesitzer p,q im Durchschnitt und ist $B(p,q) \cap VR(p,L) \cap VR(q,R)$ unbeschränkt?

Synchronisieren: wähle unbeschränkte Kante e von $V(L)$

finde unbeschränkte Region von $V(R)$, die unbeschränkten Anteil von e enthält

Winkel testen!

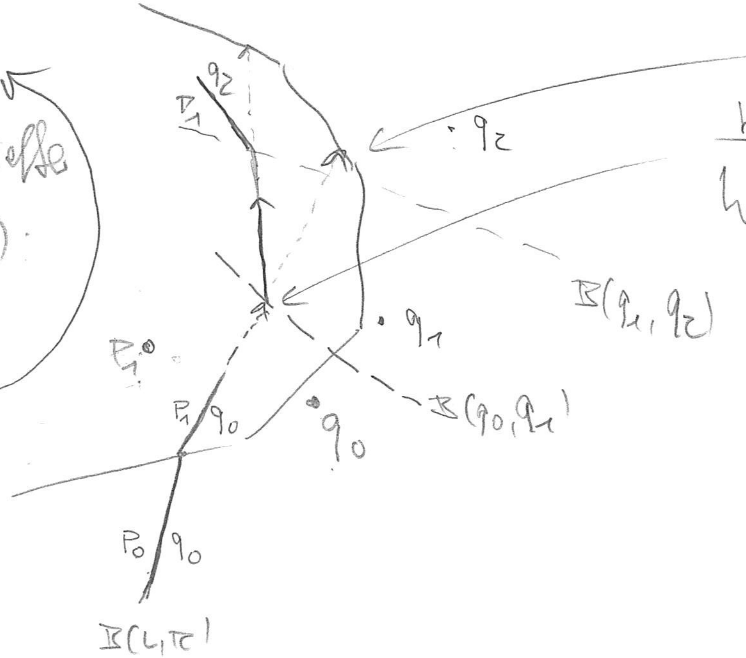
Dann: simultanen Umlauf starten.

$O(n)$, um (a) auszuführen

AlgGeo 19.9

Jetzt (b): Verfolgung von $B(L,R)$ durch $V(L)$ und $V(R)$

Finden des Treffs auf $\partial VR(p,L)$: Suche gegen Uhrzeiger



beide Treffer berechnen! Welches kommt zuerst?

Finden des Treffes auf den Regionen von $V(R)$: Absuchen der Ränder im Uhrzeiger