

$W \subseteq \mathbb{R}^d$ mit n Zusammenhangskomponenten

\Rightarrow Element $x \in W$ erfordert
 $\geq \log n$ viele Tests

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d \stackrel{?}{<} 0$$

Anwendungen

Problem ε -closeness

Gegeben: $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$

Frage: Gibt $i \neq j$: $|x_i - x_j| < \varepsilon$?

Korollar 1.6

ε -closeness hat Komplexität $\Theta(n \log n)$ im linearen Modell

Bew: $\Theta(n \log n)$: Sortieren

$\Omega(n \log n)$: $W := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \forall i \neq j: |x_i - x_j| \geq \varepsilon\}$

= die Tupel mit Antwort "nein"

für jede Permutation π sei $W_\pi := \{(x_1, \dots, x_n) \in W; x_{\pi(1)} < x_{\pi(2)} < \dots < x_{\pi(n)}\}$

Beweis Die W_π sind die Blöcke von W !

Bew (i) Jedes W_π ist wegziehbar

(ii) $\pi \neq \beta \Rightarrow$ es gibt in W keinen Weg von W_π nach W_β

(i) Seien $p, q \in W_\pi$. Angenommen $p_i \geq p_j + \epsilon$
 $\Rightarrow q_i \geq q_j + \epsilon$, weil p, q im selben W_π

$\Rightarrow \forall a \in [0,1] : (1-a)p_i + aq_i \geq (1-a)(p_j + \epsilon) + a(q_j + \epsilon) = (1-a)p_j + aq_j + \epsilon$

\Rightarrow beliebig
 Liniensegment $\{(1-a)p + aq ; a \in [0,1]\} \subset W_\pi$

$\Rightarrow W_\pi$ konvex, also Wg-System

(ii) Seien $\pi \neq \beta$ zwei Permutationen, $p \in W_\pi, q \in W_\beta$

wir zeigen: es gibt keinen Wg von p nach q in W
 indirekte Annahmen, es gäbe $f: [0,1] \rightarrow W$ stetig mit $f(0)=p, f(1)=q$

$\pi \neq \beta \Rightarrow \exists i \neq j : p_i < p_j \text{ und } q_i > q_j$

Schreibe $f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a))$ mit f_i stetig

$$\left. \begin{array}{l} f_i(0) - f_j(0) = p_i - p_j < 0 \\ f_i(1) - f_j(1) = q_i - q_j > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Zwischenwertsatz} \quad \exists a \in [0,1] : f_i(a) - f_j(a) = 0$$

$\Downarrow f(a) \notin W. \quad [1.6]$

Kor. 1.10 Closest Pair hat Komplexität $O(n \log n)$ im linearen Modell 

Bew: $O(n \log n)$: Algorithmus mit Sweep

$\Omega(n \log n)$: wegen ϵ -Closest Pair: $x_i \mapsto (x_i, 0)$ Hätte man schnell Closest Pair, müsste man, ob Abstand $< \epsilon$ auftritt.

Ganz ähnlich wie ε -closeness:

Problem Element Uniqueness:

Gegeben: $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Frage Gibt es $i \neq j$: $x_i = x_j$?

Kor 1.7 Element Uniqueness hat ebenfalls Komplexität $\Theta(n \log n)$

Kor 1.8 Auch im hierem Modell hat Suchen Komplexität $\Theta(n \log n)$.

Frage Warum nur lineare Tests $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d \stackrel{?}{<} 0$ erlauben?

Warum nicht $c_1 x_1^{17} x_2^2 - c_2 x_1 x_3^5 + \dots + d \stackrel{?}{<} 0$?

allgemein: Test $h(x_1, \dots, x_n) \stackrel{?}{<} 0$, wobei h Polynom in Variablen x_1, \dots, x_n mit Grad $\leq d$

(i) Beweis von unteren Schranken wird schwieriger!

Denn: Die Mengen A_b (alles Inputs, die in \mathbb{R}^n terminieren) brauchen nicht zusammenhängend zu sein

Aber (Kühn, Thom):

$\{(x_1, \dots, x_n); h_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ und } h_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ und } \dots \text{ und } h_r(x_1, \dots, x_n) = 0\}$
 hat $\leq d(d-1)^{n-1}$, falls h_i Polynome vom Grad $\leq d$ sind

(ii)

Auswertung von $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ ergibt:

$= 0 \iff$ Antwort auf Element Uniqueness ist "ja"
d.h. $\exists i \neq j : x_i = x_j$

Müssen Kosten für die Auswertung von $\prod (x_i - x_j)$ in unser Kostenmodell integrieren.

Wird durch Zerlegung in Elementaroperationen $+, \cdot, -, /$

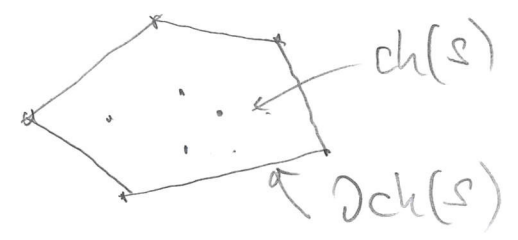
\rightsquigarrow Algebraisches Modell. Erfreulich: unsere unteren Schranken gelten auch dort (Bsp - 0.)

Kleiner Sprung: 4.1 Konvexe Hüllen ebener Punktmenge

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Konvexe Hülle $ch(A) := \bigcap_{\substack{K \supseteq A \\ K \text{ konvex}}} K$

Klar: \mathbb{R}^d konvex \Rightarrow für jedes A existiert konvexe Obermenge
 $ch(\emptyset) = \emptyset$
 $ch(A)$ ist die bezüglich " \subseteq " kleinste konvexe Obermenge von A .

Wiss: $A = S$ Menge von n Punkten im \mathbb{R}^2



Def Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$

$p \in A$ heißt innerer Punkt von $A \iff \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(p) \subseteq A$



A heißt offen \iff jedes $p \in A$ ist innerer Punkt
 $\{z \in \mathbb{R}^d; |z-p| < \varepsilon\}$

A abgeschlossen $\iff A^c$ offen

$p \in \mathbb{R}^d$ heißt Randpunkt von $A \iff \forall \varepsilon > 0$
 $U_\varepsilon(p) \cap A \neq \emptyset$
 $U_\varepsilon(p) \cap A^c \neq \emptyset$

Beispiel:



links offen rechts
abgeschl.

Intervall $(0, 1]$

$$= \{x \in \mathbb{R}; 0 < x \leq 1\}$$

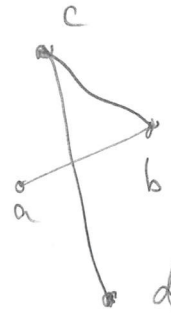
$$\partial (0, 1] = \{0, 1\}$$

[] : in LATEX mit \partialpartial im MathMode]

Frage \rightarrow S Menge von n Punkten im \mathbb{R}^2 .

sieht $ch(S)$ wirklich so aus wie im Bildchen?

Def. polygonale Kette: endliche Folge von aneinander grenzenden
 Liniensegmenten $ab, bc, cd \dots$

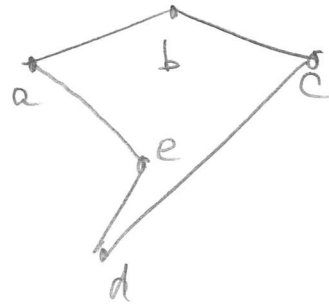


(einfaches) Polygon: inneres Gebiet eines einfachen, geschlossenen
 Polygonalen Kette

Theorem (Jordan)

Sei C eine einfache,
 geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2 .

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus C$ besteht aus
 genau zwei Wegzusammenhangskomponenten
 beschränkt: inneres Gebiet
 unbeschränkt: äußeres Gebiet



einfach: keine Selbstschnitte
 geschlossen: Anfangspunkt
 = Endpunkt

inneres Gebiet:
 Spezialfall des Jordanschen
 Kurvensatzes



Lemma 4.2 S Menge von n Punkten in \mathbb{R}^2 .

$\Rightarrow \text{ch}(S)$ konvexes Polygon mit Ecken in S

Beweis Induktion über n :

$n=1$:



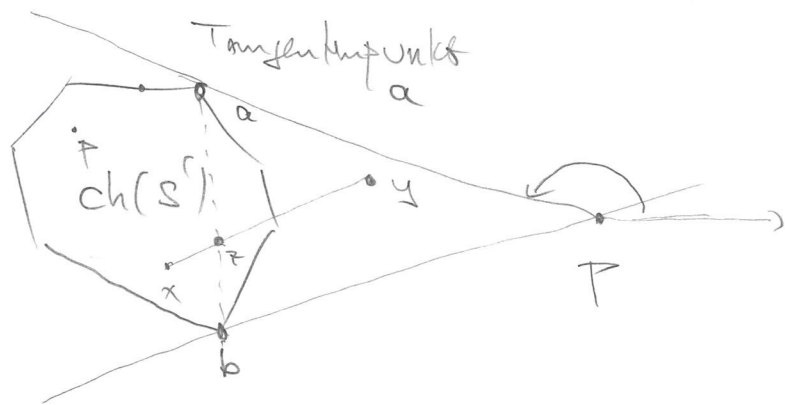
✓

$n=2$:



$n \geq 3$: Sei $p \in S$, $S' := S \setminus \{p\}$

nach Ind.-Vor.: $\text{ch}(S')$ ein konvexes Polygon mit Ecken in S'



1. Fall $p \in \text{ch}(S')$
 $\Rightarrow \text{ch}(S) = \text{ch}(S')$

2. Fall $p \notin \text{ch}(S')$

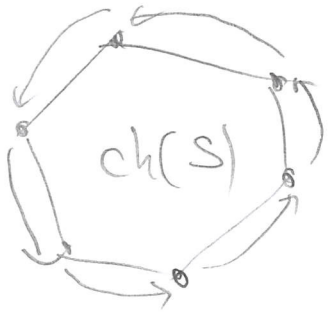
Beh. $\text{ch}(S) = \text{ch}(S') \cup \text{tria}(a, b, p)$

Bew. \supseteq : jede konvexe Obermenge von S enthält $\text{ch}(S')$ und $\text{tria}(a, b, p)$

\subseteq : zeige: $\text{ch}(S') \cup \text{tria}(a, b, p)$ ist konvex

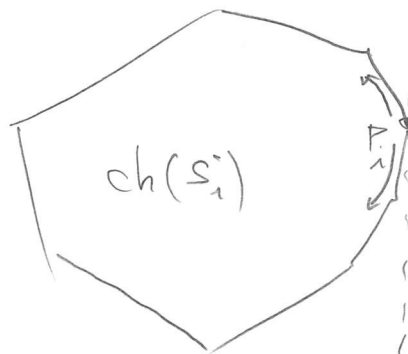
sei $z := xy \cap ab$: $\left. \begin{array}{l} xz \subset \text{ch}(S') \\ zy \subset \text{tria}(a, b, p) \end{array} \right\} \Rightarrow xy \subset \text{Verlängerung}$
[L. 4.2]

Jetzt = $ch(S)$ berechnen (d.h. die Ecken von $\partial ch(S)$ in Reihenfolge gegen Uhrzeigersinn berechnen)



Idee = Sweep nach Kochrezept: betrachte die n Punkte in aufsteigender x -Reihenfolge unterhalte dabei Konvexe Hülle der schon betrachteten Punkte

1.) Sortiere S nach x -Koordinaten: p_1, p_2, \dots, p_n
 sweep line L stößt gerade auf p_{i+1} : Ereignis



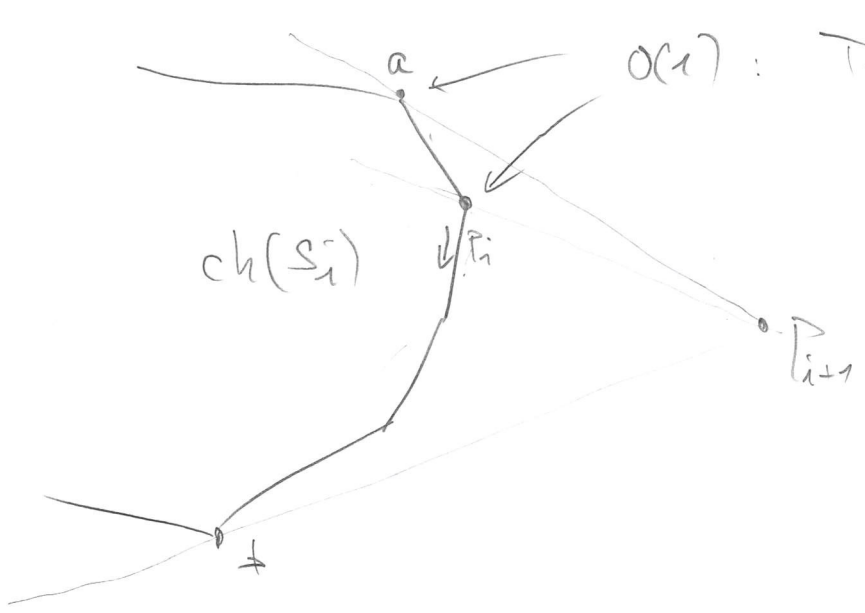
ganze S_i
links von
dieser Gerade

keine
Kanten von
 $ch(S_i)$

$$S_i := \{p_1, \dots, p_i\}$$

$$p_i p_{i+1} \cap ch(S_i) = \{p_i\}$$

suche von p_i aus $\partial ch(S_i)$
nach Tangentialpunkten a, b ab



$O(1)$: Test, ob Tangentpunkt erreicht:

Kanten $a p_{i-1}$ & $p_{i+1} b$ zu $\partial ch(S_i)$ hinzufügen

das p_i zugehörige Randstück von $ch(S_i)$ zwischen a und b entfernen

Algorithmus korrekt ✓
 Laufzeit ?

Sortieren: $O(n \log n)$

Suche nach Tangentpunkten: $\leq 2 \cdot n +$ vergeblich besuchte Eckpunkte

die Kosten "amortisieren" sich: $O(n)$

Theorem 4.7 Sei S Menge von n Punkten im \mathbb{R}^2 , nach ihrer Koordinate sortiert. Dann kann man $ch(S)$ in Zeit $O(n)$ berechnen.