Logik und diskrete Strukturen WS 2014/15
Übungsblatt 3
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 28.10.2014, bis 10:15 Uhr | Besprechung: KW 45

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Geben Sie bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer an.*
- *Die Abgabe in festen Gruppen bis zu 3 Personen ist erlaubt, sofern alle in der gleichen Übungsgruppe sind.*

Auch wenn wir es nicht explizit erwähnen, so gehört zu einer vollständigen Lösung einer Übungsaufgabe auch immer ein Beweis der aufgestellten Behauptungen. Es genügt also zum Beispiel in Aufgabe 3 a) nicht zu sagen, dass die Abbildung f_λ injektiv ist. Es sollte auch ein Beweis dieser Behauptung angegeben werden. Sagen Sie andererseits, dass die Abbildung f_λ nicht injektiv ist, so sollten Sie dies durch ein Gegenbeispiel belegen.

Aufgabe 1: Vollständige Induktion 2+2 Punkte

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Aussagen.

a) Die Abbildung $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} &T(1) = 1 \ \text{ und} \\ &T(n) = T(n-1) + n \ \text{ für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Es gilt $T(n) \leq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Es gilt $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} i^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bitte wenden

Aufgabe 2: **Relationen** 1+1+2 Punkte

Betrachten Sie folgenden Relationen R_1, R_2 und R_3^p und zeigen Sie, welche aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften sie besitzen.

a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\big|\, |a| = |b|\}$

b) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\big|\, |a-b| < 1\}$

c) $R_3^p = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\big|\, \exists z \in \mathbb{Z} : a - b = z \cdot p\}$, für ein $p \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3: **Abbildungen** 1+1+1+1 Punkte

a) Geben Sie für die folgenden Abbildungen an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

  (i) $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$

  (ii) $g \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen M

  (iii) $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = xy$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

b) Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 4: **Abbildungen** 2+2 Punkte

a) Seien $f \colon N \to P$ und $g \colon M \to N$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch die Verknüpfung $f \circ g \colon M \to P$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ eine Abbildung ist.

b) Sei $f \colon M \to N$ eine Abbildung. Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} \colon N \to M$ mit $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in M$ und $(f \circ f^{-1})(y) = y$ für alle $y \in N$?