Logik und diskrete Strukturen WS 2014/15
Übungsblatt 8
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 2.12.2014, bis 10:15 Uhr — Besprechung: KW 50

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Geben Sie bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer an.*
- *Die Abgabe in festen Gruppen bis zu 3 Personen ist erlaubt, sofern alle in der gleichen Übungsgruppe sind.*

Aufgabe 1: Vollständige Induktion — 2+2 Punkte

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$\sum_{i=0}^{2n} \frac{i(i+4)}{2} + \sum_{i=4}^{2(n+2)} \frac{i(i-4)}{2} - \sum_{i=2}^{2(n+1)} (i^2 - i - 2)$$

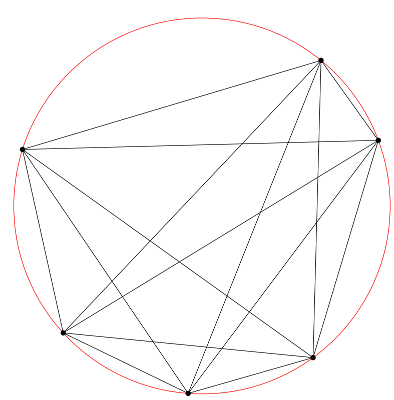
Aufgabe 2: Kombinatorik — 2+2 Punkte

Auf einem Kreis liegen n Punkte. Jeder der Punkte ist mit jedem anderen mit einer Kante verbunden. Die Punkte liegen derart, dass sich von den Kanten nicht mehr als zwei in einem Punkt innerhalb des Kreises schneiden.

a) Wie viele Kanten gibt es?

b) Wie viele Schnittpunkte von Kanten gibt es im Inneren des Kreises?

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie viele der n Punkte für genau einen Schnittpunkt im Inneren verantwortlich sind.



Bsp. für $n = 6$

Aufgabe 3: Verknüpfungen 1+1,5+1,5 Punkte

Geben Sie für die folgenden Strukturen mit Begründung an, ob es sich um eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe handelt und ob die Verknüpfung kommutativ ist.

a) $(\mathbb{R}^2, \#)$ mit $(x_1, x_2)\#(y_1, y_2) = (x_1, y_2)$

b) $(\mathbb{Z}, *)$ mit $x * y = x + y - 1$

c) $(\{0,1\}^n, \bullet)$ mit $(a_1, \ldots, a_n) \bullet (b_1, \ldots, b_n) = (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$

Aufgabe 4: Algebraische Strukturen 1,5+1,5+1 Punkte

Seien M eine nichtleere Menge und $\star$ eine Verknüpfung auf M. Wir definieren auf $\mathcal{P}(M)$ eine Verknüpfung $\circ$ durch $A \circ B = \{a \star b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \circ)$ eine Halbgruppe ist, wenn $(M, \star)$ eine Halbgruppe ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \circ)$ ein Monoid ist, wenn $(M, \star)$ ein Monoid ist.

c) Ist $(\mathcal{P}(M), \circ)$ stets eine Gruppe, wenn $(M, \star)$ eine Gruppe ist?