Logik und diskrete Strukturen WS 2014/15
Übungsblatt 12
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 13.1.2014, bis 10:15 Uhr   Besprechung: KW 05

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Geben Sie bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer an.*
- *Die Abgabe in festen Gruppen bis zu 3 Personen ist erlaubt, sofern alle in der gleichen Übungsgruppe sind.*

Aufgabe 1: Strukturelle Induktion 4 Punkte

Sei φ eine aussagenlogische Formel. Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass die Ungleichung

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\varphi|_{x_i} \leq |\varphi|_(+ 1$$

gilt. Dabei gibt $|\varphi|_a$ an, wie oft das Zeichen a in der Formel φ enthalten ist.

Aufgabe 2: Aussagenlogische Formeln 1 2+2 Punkte

a) Entscheiden Sie für die folgenden Formeln, ob sie jeweils erfüllbar, gültig oder unerfüllbar sind.

- $\Big(x_2 \vee \big((x_1 \wedge x_2) \to x_3\big)\Big)$
- $\big((x_1 \to x_2) \leftrightarrow (\neg x_2 \to \neg x_1)\big)$
- $\Big((x_1 \to x_2) \leftrightarrow \big((x_1 \wedge \neg x_2) \to \mathbf{0}\big)\Big)$

b) Wir betrachten die aussagenlogischen Formeln φ_n, gegeben durch

$$\varphi_n = \begin{cases} (x_n \leftrightarrow x_{n+2}) & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ (x_n \leftrightarrow \neg x_{n-1}) & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine Bewertung an, die φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Aufgabe 3: Resolutionskalkül 4 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, dass

$$\varphi = (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge D) \vee B$$

gültig ist.

Aufgabe 4: Aussagenlogische Formeln 2 4 Punkte

Ein klassisches Problem der diskreten Mathematik ist das *Vier-Farben-Problem*: Kann eine Landkarte derart mit vier Farben eingefärbt werden, dass benachbarte Gebiete stets unterschiedlich gefärbt sind?

Bestimmen Sie in Anlehnung an das Sudoku-Beispiel aus der Vorlesung für eine gegebene Landkarte eine aussagenlogische Formel φ, die genau dann erfüllbar ist, wenn eine Färbung der Landkarte mit höchstens vier Farben existiert. Die Formel soll dergestalt sein, dass aus jeder erfüllenden Bewertung eine gültige Färbung der Landkarte abgelesen werden kann.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $L = \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Länder und $N \subseteq L \times L$ die Menge der Paare (ℓ_1, ℓ_2) benachbarter Länder ℓ_1 und ℓ_2 ist.