Offline Bewegungsplanung: Reine Translation

Elmar Langetepe
University of Bonn

Untere Kontur: Def. A10

Untere Kontur: Def. A10

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ reellwertige Funktionen, entweder

Untere Kontur: Def. A10

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ reellwertige Funktionen, entweder

- über einem gemeinsamen Intervall I oder

Untere Kontur: Def. A10

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ reellwertige Funktionen, entweder

- über einem gemeinsamen Intervall I oder
- über je einem Intervall $I_j \subseteq I$, $1 \leq j \leq n$.

Untere Kontur: Def. A10

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ reellwertige Funktionen, entweder

- über einem gemeinsamen Intervall I oder
- über je einem Intervall $I_j \subseteq I$, $1 \leq j \leq n$.

Je zwei Funktionen max. s gemeinsame Schnittpunkte

Untere Kontur: Def. A10

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ reellwertige Funktionen, entweder

- über einem gemeinsamen Intervall I oder
- über je einem Intervall $I_j \subseteq I$, $1 \leq j \leq n$.

Je zwei Funktionen max. s gemeinsame Schnittpunkte

$L(x) := \min \{ f_i(x) | 1 \leq i \leq n \}$

Untere Kontur: Def. A10

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ reellwertige Funktionen, entweder

- über einem gemeinsamen Intervall I oder
- über je einem Intervall $I_j \subseteq I$, $1 \leq j \leq n$.

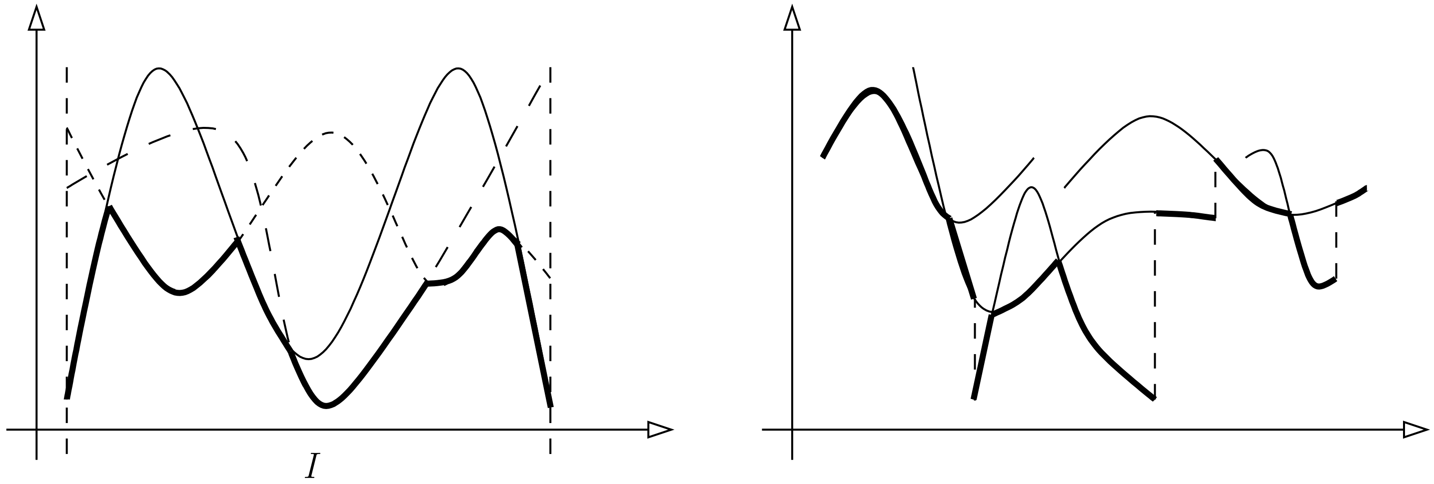
Je zwei Funktionen max. s gemeinsame Schnittpunkte

$L(x) := \min \{ f_i(x) | 1 \leq i \leq n \}$

Lower envelope der Funktionsgraphen

Untere Kontur: Th. A12

Untere Kontur: Th. A12



(1) (2)

$L(x)$ besteht aus maximal

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

vielen Teilstücken

Beweis: Th. A12

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.:

Beweis: Th. A12

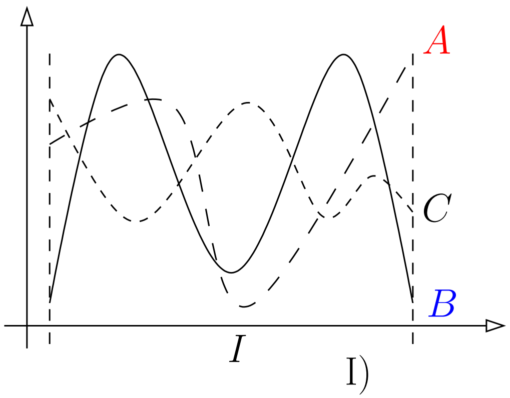
1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

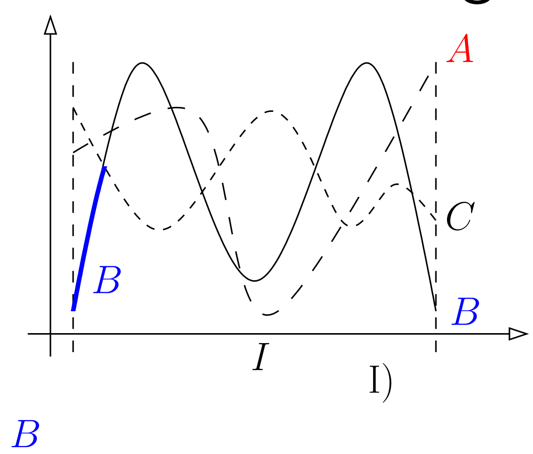
1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen



Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

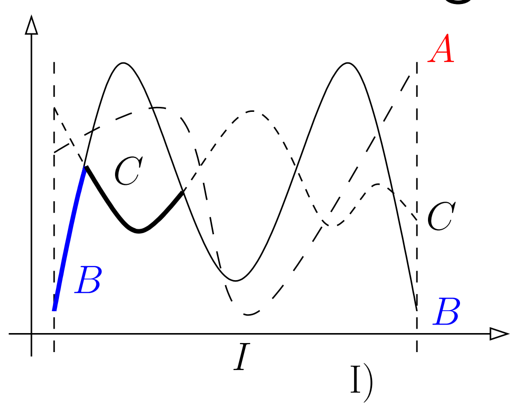
1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen



Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

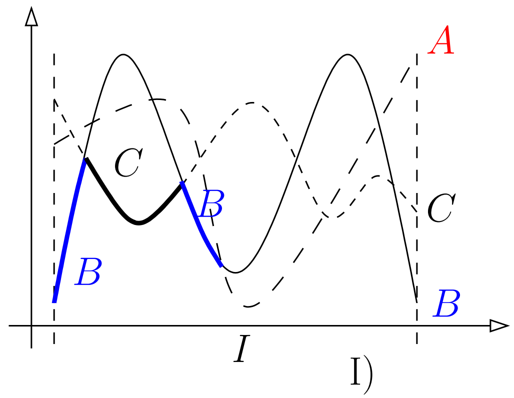


$B\ C$

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

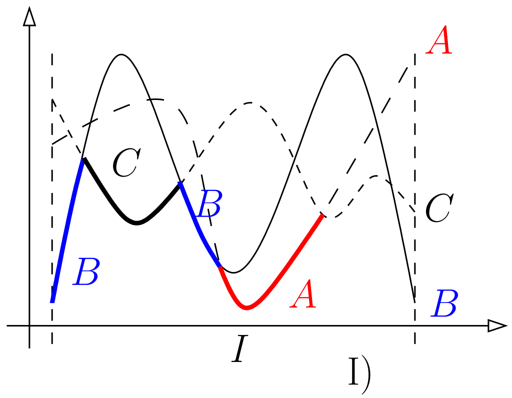


$B\ C\ B$

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

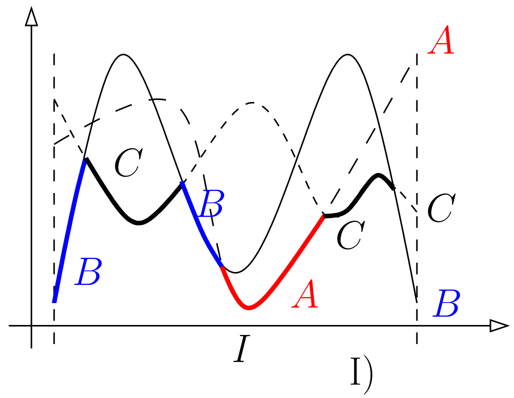


$B\ C\ B\ A$

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

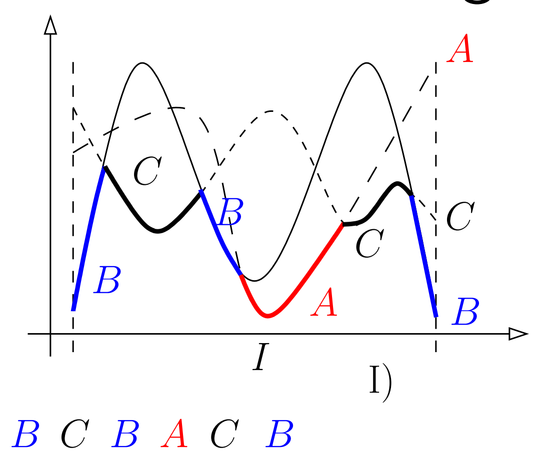


$B \ C \ B \ A \ C$

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

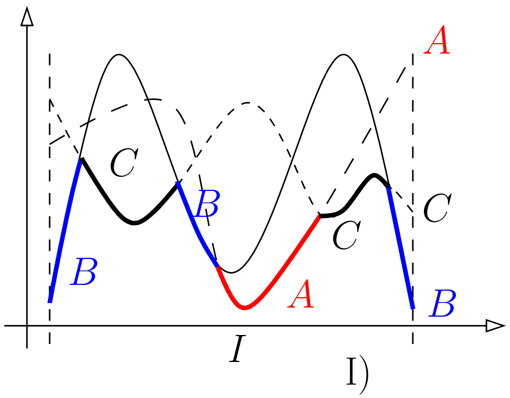
1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen



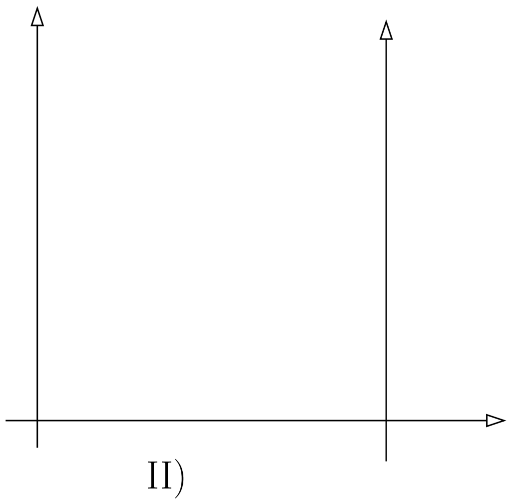
Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen



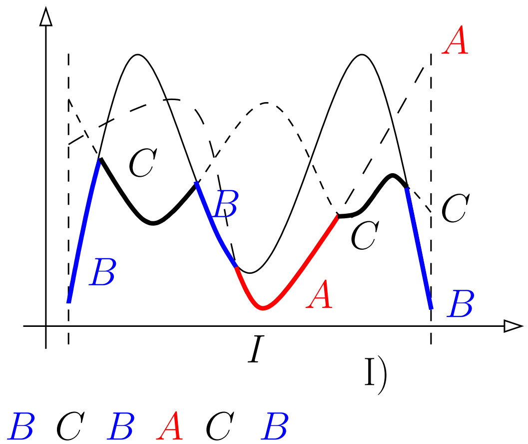
$B\ C\ B\ A\ C\ B$

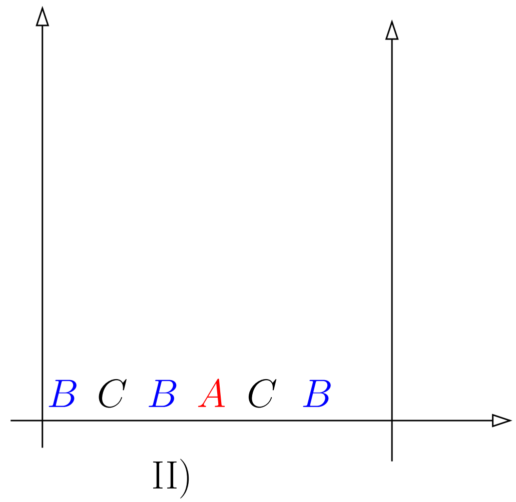


Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

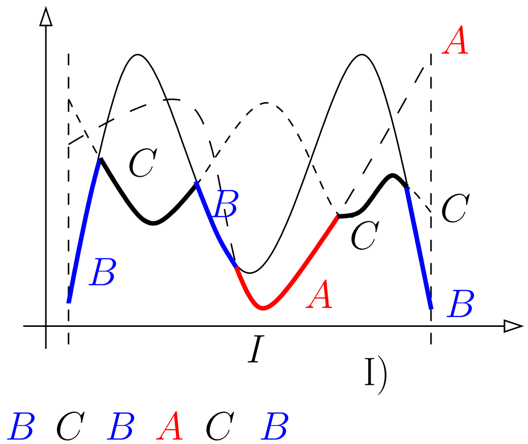


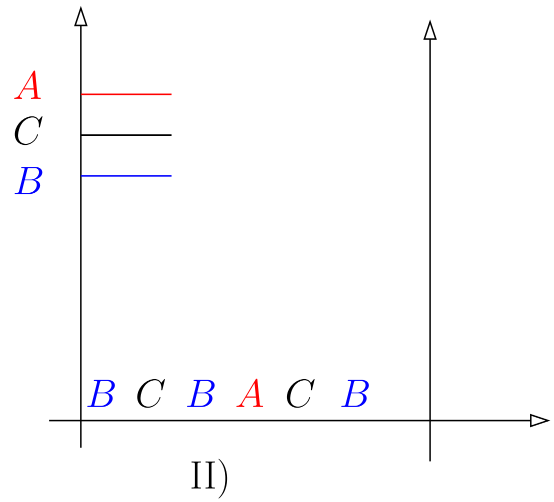


Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

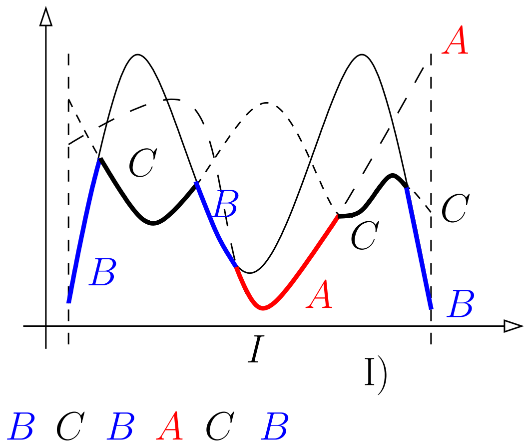


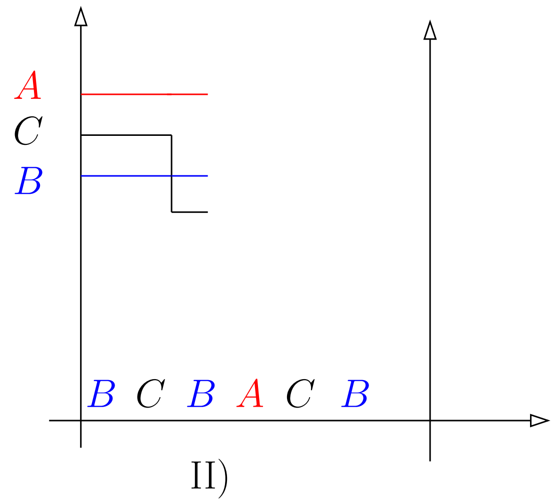


Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

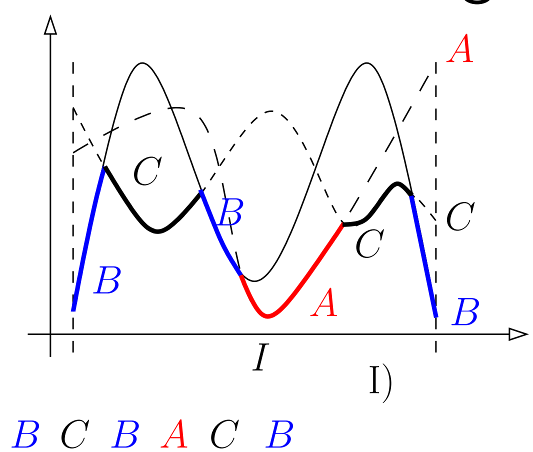


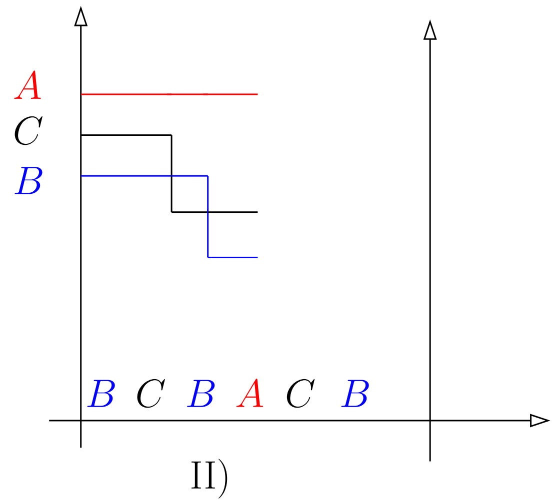


Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

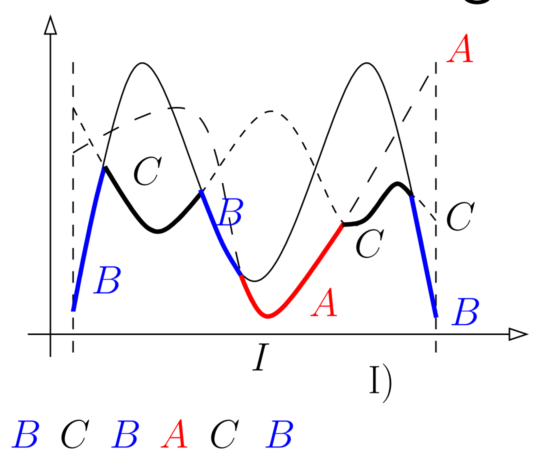


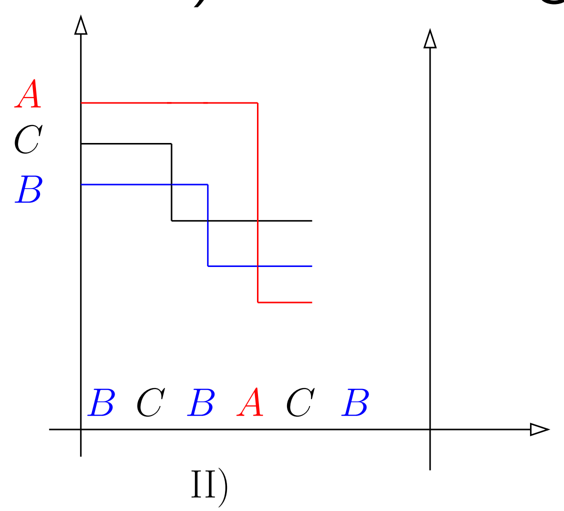


Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

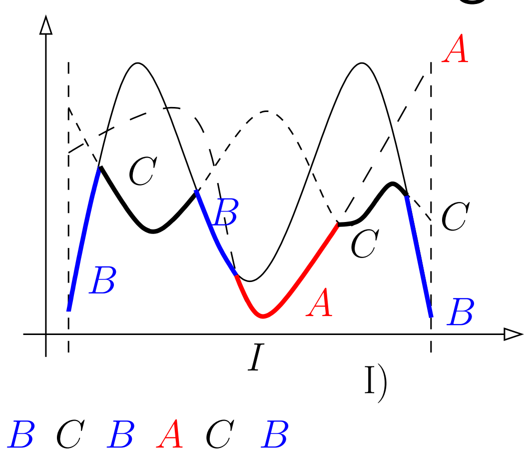


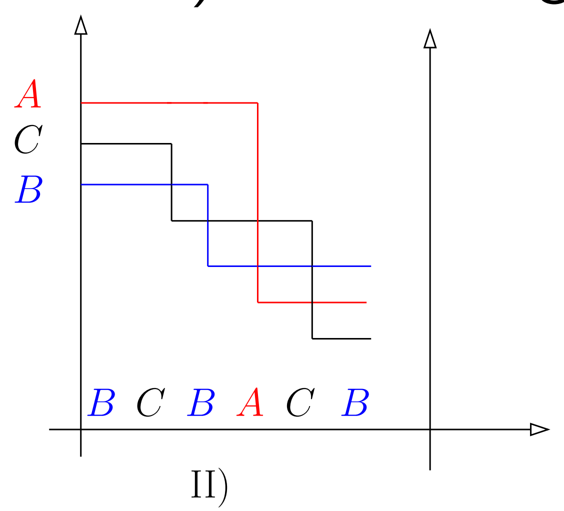


Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

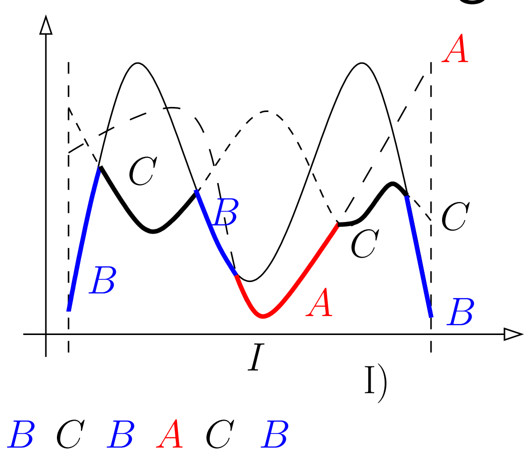


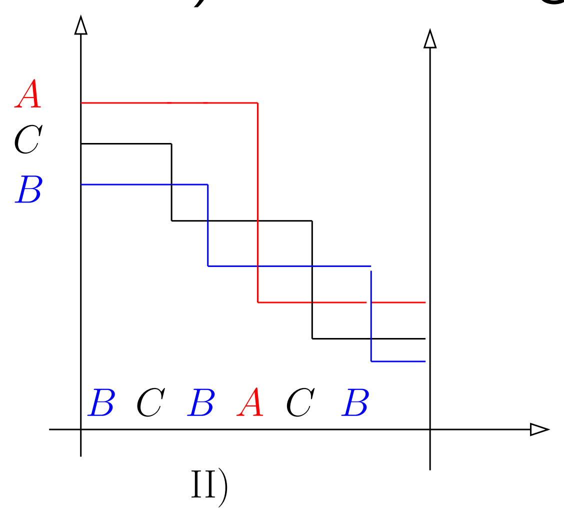


Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen

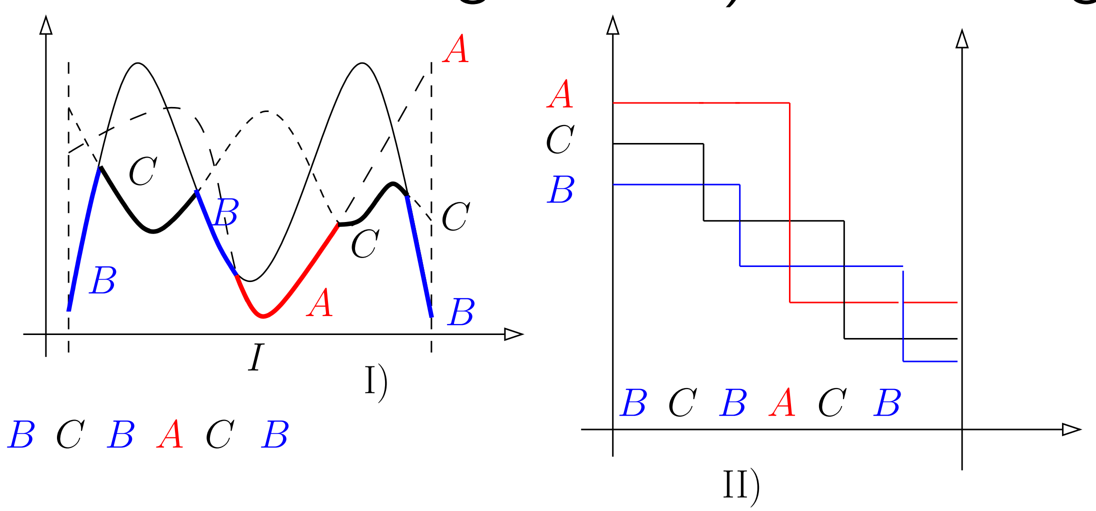




Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

1.: I) Übersetzen in Buchst.-folge oder II) Buchst.-folge übersetzen



Beweis: Th. A12

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

Beweis: Th. A12

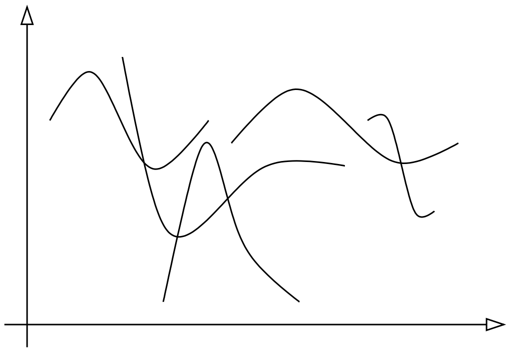
1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

2. Verlängern auf gesamtes Intervall, dann 1. verwenden

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

2. Verlängern auf gesamtes Intervall, dann 1. verwenden

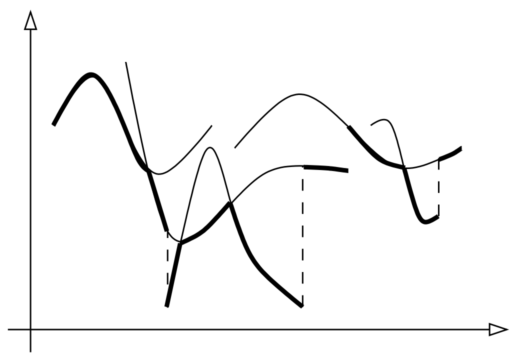


(2)

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

2. Verlängern auf gesamtes Intervall, dann 1. verwenden

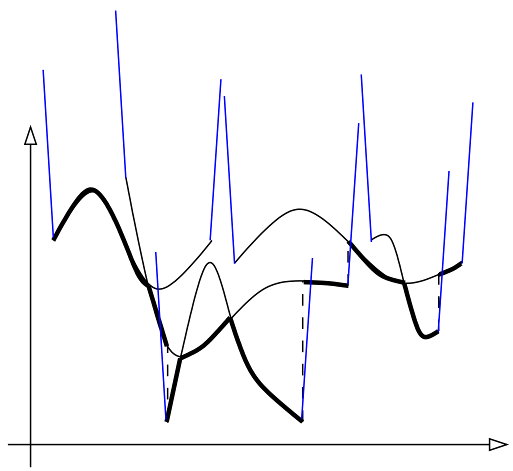


(2)

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

2. Verlängern auf gesamtes Intervall, dann 1. verwenden



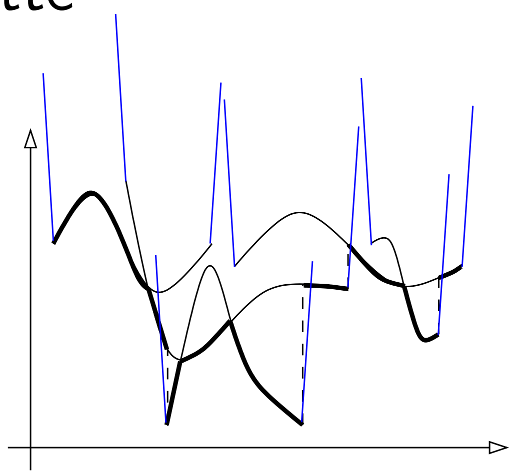
(2)

Beweis: Th. A12

1. $\lambda_s(n)$
2. $\lambda_{s+2}(n)$

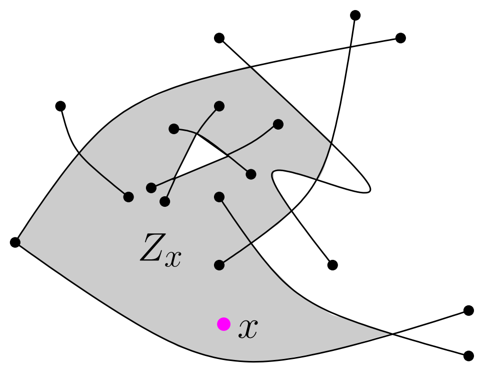
2. Verlängern auf gesamtes Intervall, dann 1. verwenden

Max zwei zusätzliche Schnitte



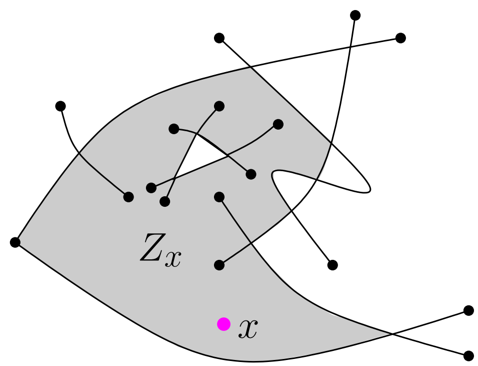
(2)

Zellen: Th. 2.18



Zellen: Th. 2.18

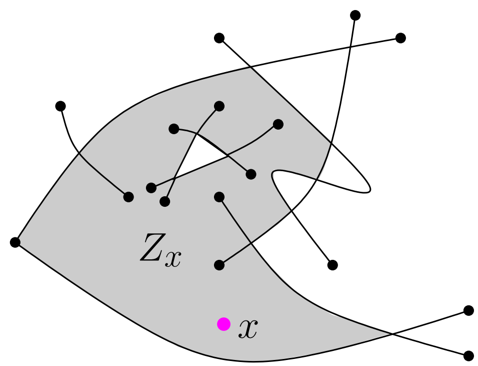
A Arrangement von n Kurvenstücken von denen sich zwei nur s mal schneiden. Jede Zelle von A hat Komplexität $O(\lambda_{s+2}(n))$.



Zellen: Th. 2.18

A Arrangement von n Kurvenstücken von denen sich zwei nur s mal schneiden. Jede Zelle von A hat Komplexität $O(\lambda_{s+2}(n))$.

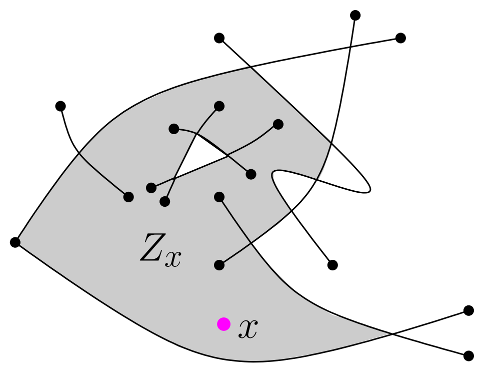
Weniger als $\Omega(n^2)$!!



Zellen: Th. 2.18

A Arrangement von n Kurvenstücken von denen sich zwei nur s mal schneiden. Jede Zelle von A hat Komplexität $O(\lambda_{s+2}(n))$.

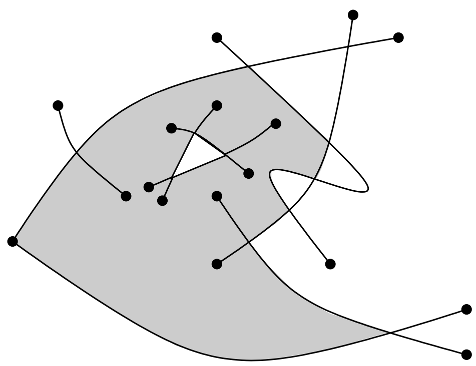
Weniger als $\Omega(n^2)$!! Beweis!!



Beweis: Th. 2.18

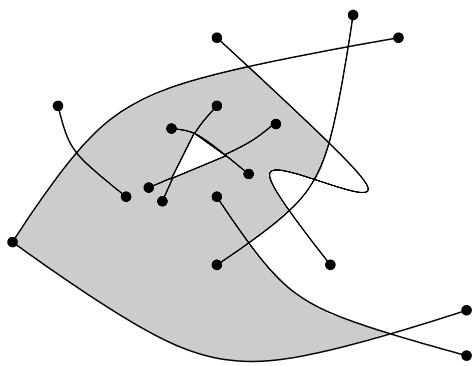
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen



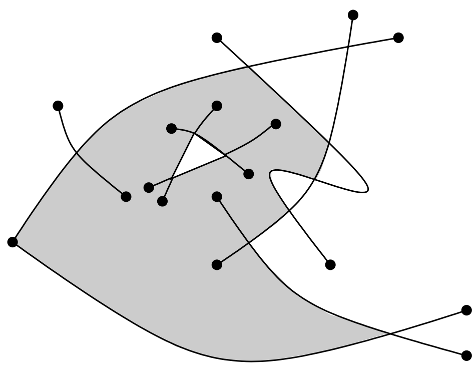
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht!



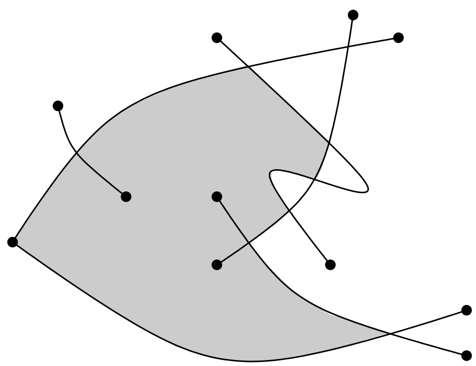
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente



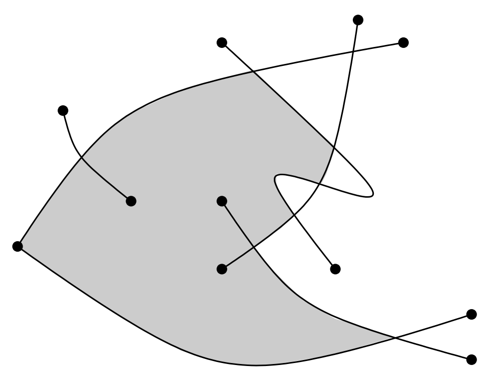
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente



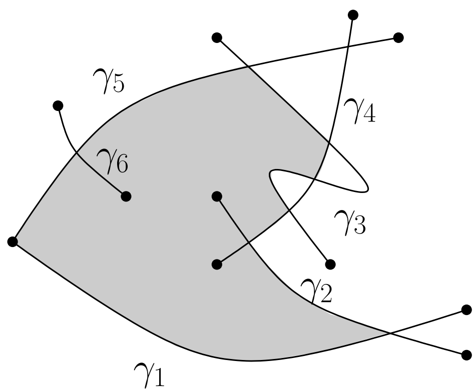
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente
- Bezeichnen,



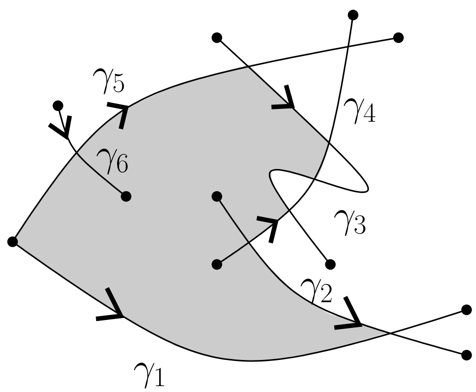
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente
- Bezeichnen, orientieren: links nach rechts



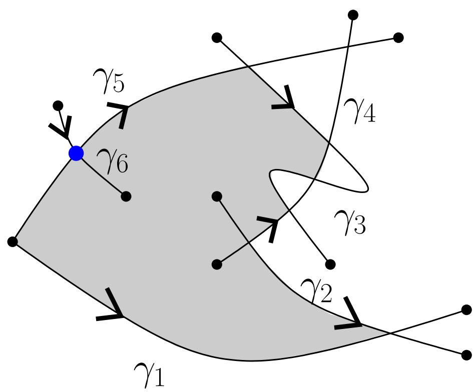
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente
- Bezeichnen, orientieren: links nach rechts



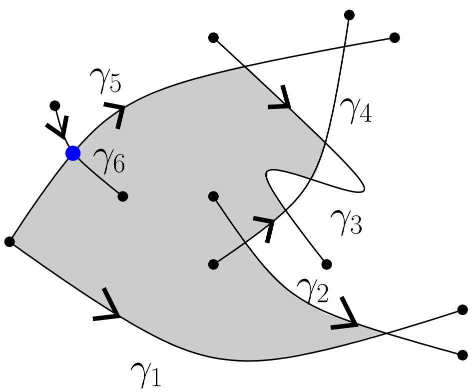
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente
- Bezeichnen, orientieren: links nach rechts



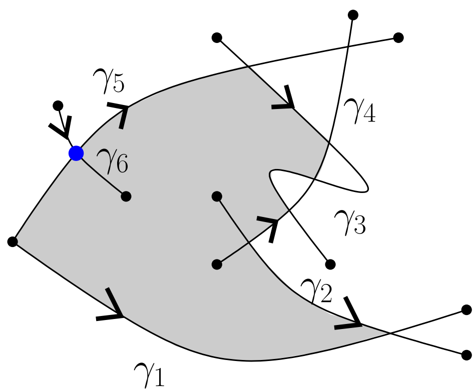
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente
- Bezeichnen, orientieren: links nach rechts
- Zyklische Abfolge
  $S =< \gamma_5^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_5^- \gamma_6^+ \gamma_6^- >$

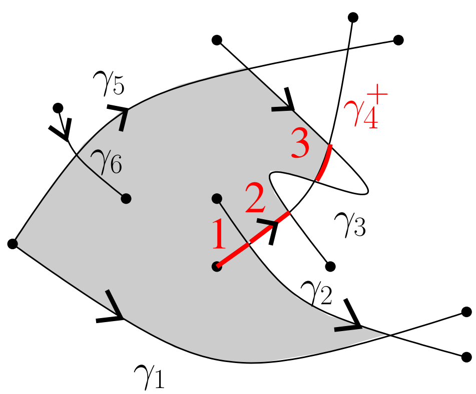


Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente
- Bezeichnen, orientieren: links nach rechts
- Zyklische Abfolge
  $S = < \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$
- $2n$ Segmente γ_i^-,γ_i^+

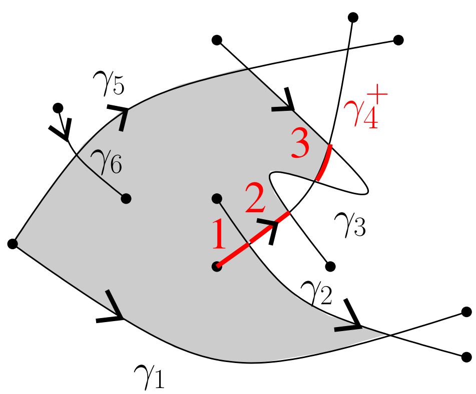


Bogenteile in Reihenfolge! Lem. 2.19



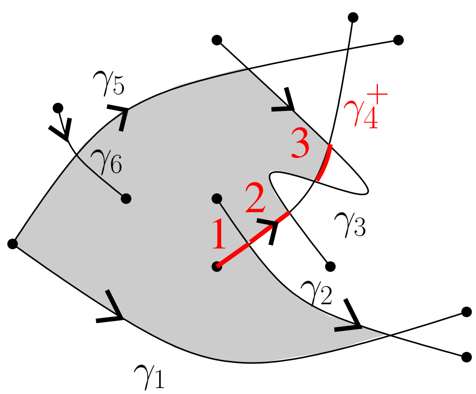
Bogenteile in Reihenfolge! Lem. 2.19

- Zyklische *Folge* des Zykels C:
  $S = < \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$



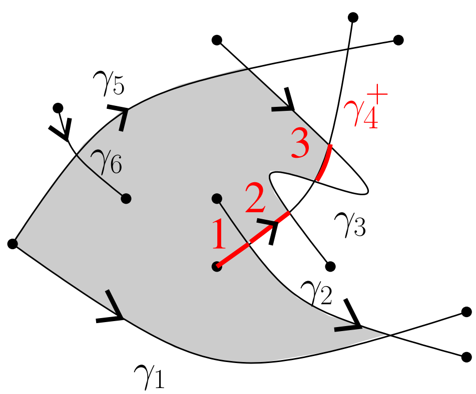
Bogenteile in Reihenfolge! Lem. 2.19

- Zyklische *Folge* des Zykels C:
  $S =< \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$
- Bogen γ_i:



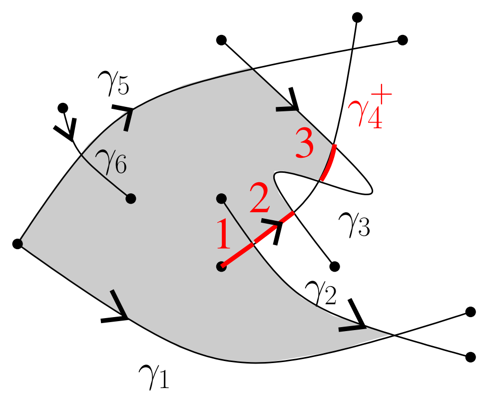
Bogenteile in Reihenfolge! Lem. 2.19

- Zyklische *Folge* des Zykels C:
$S =< \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$
- Bogen γ_i: Segmente von $\gamma_i^+(\gamma_i^-)$ erscheinen in C in derselben Reihenfolge wie entlang von $\gamma_i^+(\gamma_i^-)$



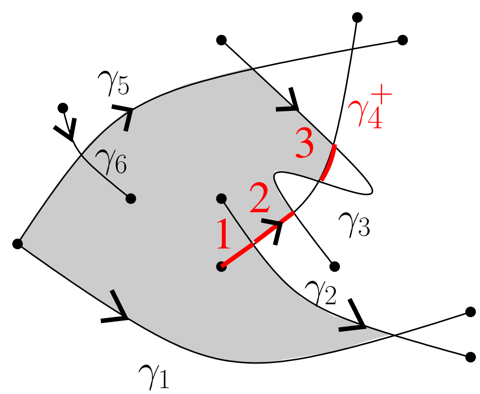
Bogenteile in Reihenfolge! Lem. 2.19

- Zyklische *Folge* des Zykels C:
  $S = < \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$
- Bogen γ_i: Segmente von $\gamma_i^+ (\gamma_i^-)$ erscheinen in C in derselben Reihenfolge wie entlang von $\gamma_i^+ (\gamma_i^-)$
- Beispiel γ_4^+!



Bogenteile in Reihenfolge! Lem. 2.19

- Zyklische *Folge* des Zykels C:
  $S = < \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$
- Bogen γ_i: Segmente von $\gamma_i^+(\gamma_i^-)$ erscheinen in C in derselben Reihenfolge wie entlang von $\gamma_i^+(\gamma_i^-)$
- Beispiel γ_4^+! Beweis!



Beweis: Konsistenzlemma 2.19

Beweis: Konsistenzlemma 2.19

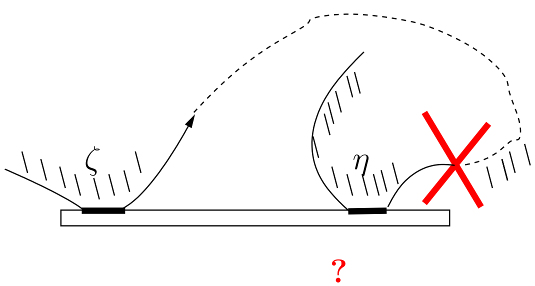
- γ_i etwas aufblasen;

Beweis: Konsistenzlemma 2.19

- γ_i etwas aufblasen; $\zeta, \eta \in \gamma_i^*$ konsekutive Subsegmente in C!

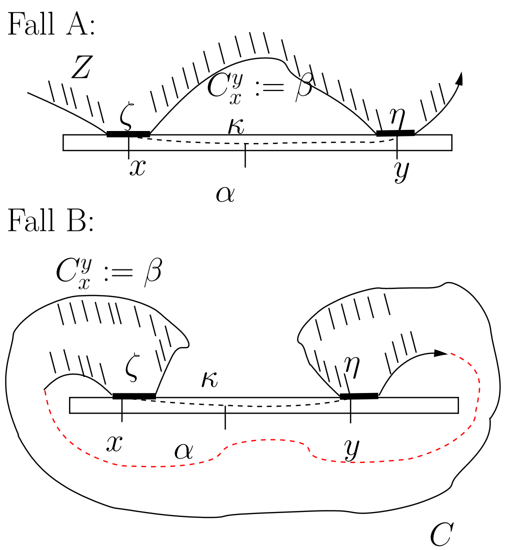
Beweis: Konsistenzlemma 2.19

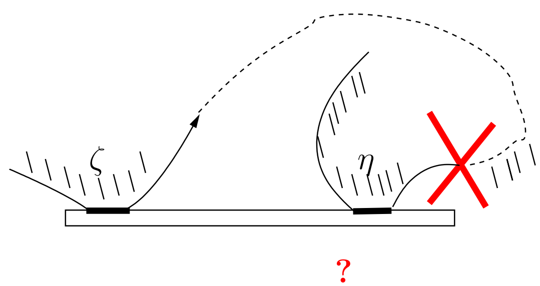
- γ_i etwas aufblasen; $\zeta, \eta \in \gamma_i^*$ konsekutive Subsegmente in C!
- Nur zwei Fälle gemäß Innerem;



Beweis: Konsistenzlemma 2.19

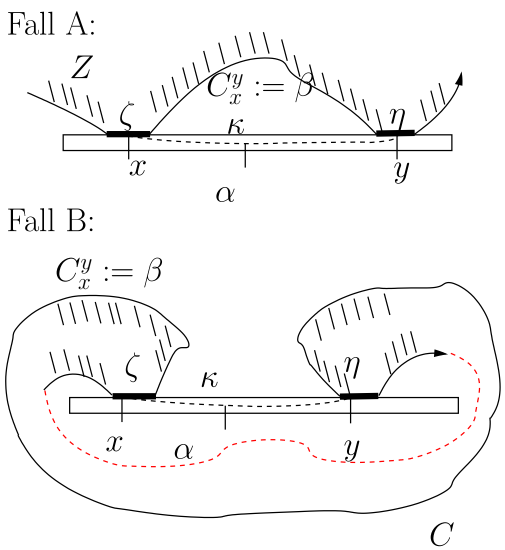
- γ_i etwas aufblasen; $\zeta, \eta \in \gamma_i^*$ konsekutive Subsegmente in C!
- Nur zwei Fälle gemäß Innerem; sonst keine Verbindung!!





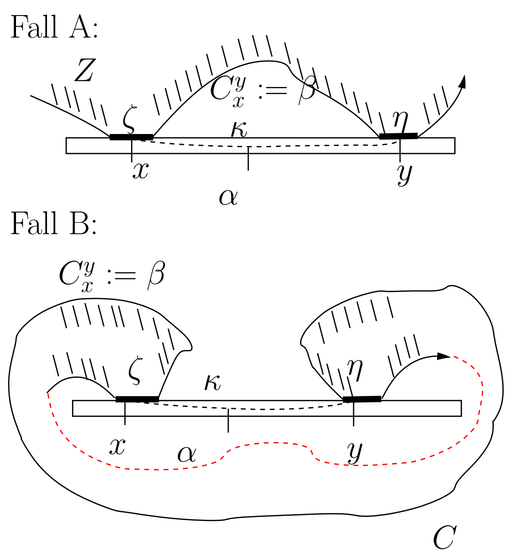
Beweis: Konsistenzlemma 2.19

- γ_i etwas aufblasen; $\zeta, \eta \in \gamma_i^*$ konsekutive Subsegmente in C!
- Nur zwei Fälle gemäß Innerem; sonst keine Verbindung!!
- Betrachte α und $\beta := C_x^y$



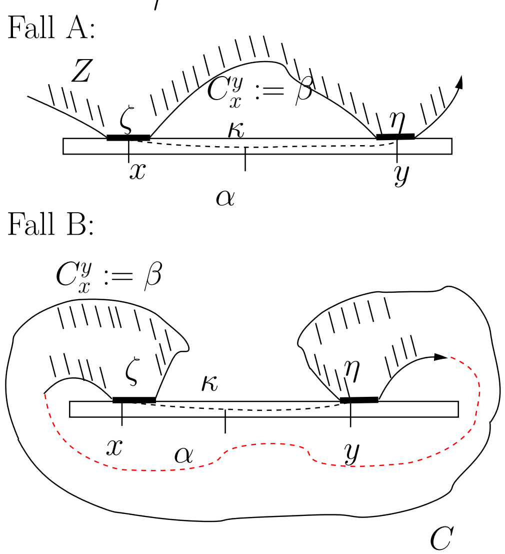
Beweis: Konsistenzlemma 2.19

- γ_i etwas aufblasen; $\zeta, \eta \in \gamma_i^*$ konsekutive Subsegmente in C!
- Nur zwei Fälle gemäß Innerem; sonst keine Verbindung!!
- Betrachte α und $\beta := C_x^y$
- β berührt γ_i^* nicht: Konsekutiv in C!

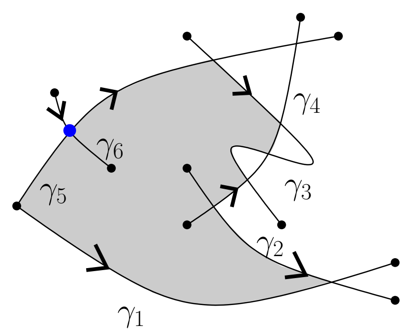


Beweis: Konsistenzlemma 2.19

- γ_i etwas aufblasen; $\zeta, \eta \in \gamma_i^*$ konsekutive Subsegmente in C!
- Nur zwei Fälle gemäß Innerem; sonst keine Verbindung!!
- Betrachte α und $\beta := C_x^y$
- β berührt γ_i^* nicht: Konsekutiv in C!
- C schnittfrei: $\alpha \cup \beta$ trennt κ von C ab

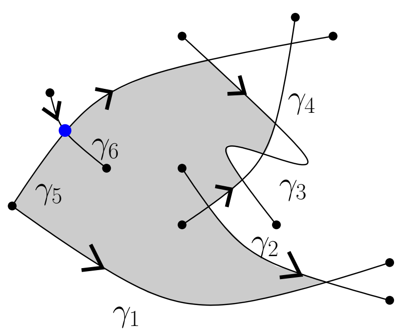


Lineare Sequenz S'' bilden!



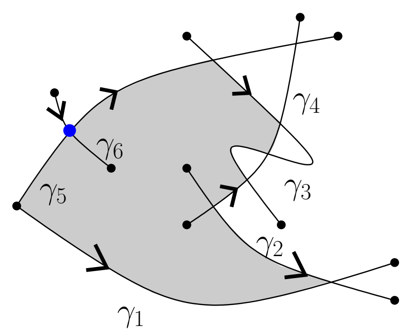
Lineare Sequenz S'' bilden!

- Zyklische Sequenz:
  $S = < \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$ auftrennen



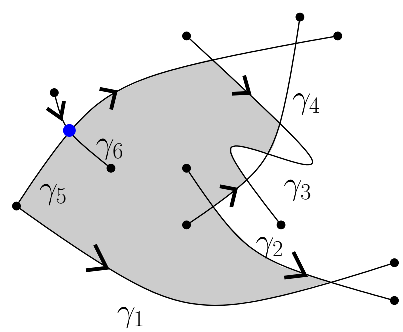
Lineare Sequenz S'' bilden!

- Zyklische Sequenz:
  $S =< \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$ auftrennen
- Orientierte Sequenz:
  $S' = \{\gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^-\}$



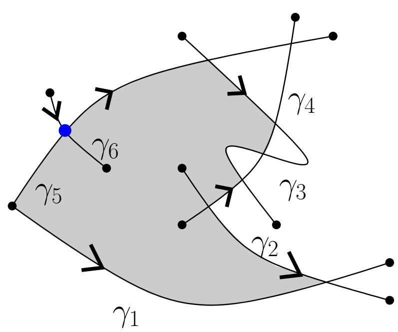
Lineare Sequenz S'' bilden!

- Zyklische Sequenz:
  $S = < \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$ auftrennen
- Orientierte Sequenz:
  $S' = \{\gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^-\}$
- Orientierte Reihenfolge stimmt nicht! Bsp.:γ_5^-



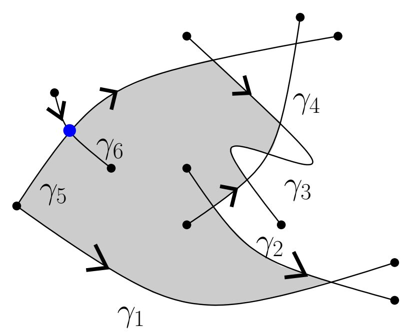
Lineare Sequenz S'' bilden!

- Zyklische Sequenz:
  $S =< \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$ auftrennen
- Orientierte Sequenz:
  $S' = \{\gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^-\}$
- Orientierte Reihenfolge stimmt nicht! Bsp.:γ_5^-
- Verdoppeln: $\gamma_i^- \ (\gamma_i^+) \Rightarrow \gamma_{i,1}^-, \gamma_{i,2}^-(\gamma_{i,1}^+, \gamma_{i,2}^+)$



Lineare Sequenz S'' bilden!

- Zyklische Sequenz:
  $S =< \gamma_5^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_5^- \gamma_6^+ \gamma_6^- >$ auftrennen
- Orientierte Sequenz:
  $S' = \{\gamma_5^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_5^- \gamma_6^+ \gamma_6^-\}$
- Orientierte Reihenfolge stimmt nicht! Bsp.:γ_5^-
- Verdoppeln: γ_i^- $(\gamma_i^+) \Rightarrow \gamma_{i,1}^-, \gamma_{i,2}^-(\gamma_{i,1}^+, \gamma_{i,2}^+)$
- Nun 4n Segmente: Sequenz
  $S'' = \{\gamma_{5,1}^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_{5,2}^- \gamma_6^+ \gamma_6^-\}$



S'' **DSS mit** $(4n, s+2)$**: Lem. 2.20**

S'' DSS mit $(4n, s+2)$: Lem. 2.20

- Definition DSS

S'' **DSS mit** $(4n, s+2)$**: Lem. 2.20**

- Definition DSS
- Zwischen zwei $\gamma^-_{i,j}(\gamma^+_{i,j})$ kommt stets anderes Segment vor

S'' **DSS mit** $(4n, s+2)$**: Lem. 2.20**

- Definition DSS
- Zwischen zwei $\gamma^-_{i,j}(\gamma^+_{i,j})$ kommt stets anderes Segment vor
- Zz.: Zwei Buchstaben ζ und η wechseln nicht mehr als $s+2$ mal

S'' DSS mit $(4n, s+2)$: Lem. 2.20

- Definition DSS
- Zwischen zwei $\gamma_{i,j}^{-}(\gamma_{i,j}^{+})$ kommt stets anderes Segment vor
- Zz.: Zwei Buchstaben ζ und η wechseln nicht mehr als $s+2$ mal
- Widerspruchsbeweis: Annahme $s+3$ Wechsel!

S'' DSS mit $(4n, s+2)$: Lem. 2.20

- Definition DSS
- Zwischen zwei $\gamma^-_{i,j}(\gamma^+_{i,j})$ kommt stets anderes Segment vor
- Zz.: Zwei Buchstaben ζ und η wechseln nicht mehr als $s+2$ mal
- Widerspruchsbeweis: Annahme $s+3$ Wechsel!
- Situation:
  $S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots \cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots))$

Lem. 2.20

Lem. 2.20

$$S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots \cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots))$$

Lem. 2.20

$$S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots \cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots))$$

Fasse je vier zusammen:

$$\begin{array}{llllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & \\
 & & (\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3, & \eta_3) \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

Lem. 2.20

$$S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots \cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots))$$

Fasse je vier zusammen:

$$\begin{array}{llllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & \\
 & & (\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3, & \eta_3) \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

Jeweils Schnitt zw. $((\zeta_1, \zeta_2), (\eta_1, \eta_2))$, $((\eta_1, \eta_2),(\zeta_2, \zeta_3))$,...

Lem. 2.20

$S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots\cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots))$

Fasse je vier zusammen:

$$\begin{array}{llllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & \\
 & & (\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3, & \eta_3) \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

Jeweils Schnitt zw. $((\zeta_1, \zeta_2), (\eta_1, \eta_2))$, $((\eta_1, \eta_2),(\zeta_2, \zeta_3))$,...

$s + 3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

Lem. 2.20

$S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots \cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots))$

Fasse je vier zusammen:

$$
\begin{array}{llllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & \\
 & & (\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3, & \eta_3) \\
 & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Jeweils Schnitt zw. $((\zeta_1, \zeta_2), (\eta_1, \eta_2))$, $((\eta_1, \eta_2)$,$(\zeta_2, \zeta_3))$,...

$s + 3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

$((s + 3)$ gerade Übung!)

Lem. 2.20

Lem. 2.20

$s+3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

Lem. 2.20

$s+3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

$$
\begin{array}{llllllll}
(\zeta_1 & , \eta_1 & , \zeta_2 & , \eta_2) & & & & \\
& (\eta_1 & , \zeta_2 & , \eta_2, & \zeta_3) & & & \\
& & & \vdots & & & & \\
& & & & (\zeta_{\frac{s+2}{2}} & , \eta_{\frac{s+2}{2}} & , \zeta_{\frac{s+2}{2}+1} & , \eta_{\frac{s+2}{2}+1})
\end{array}
$$

Lem. 2.20

$s+3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

$$
\begin{array}{llllllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & & & \\
 & & & \vdots & & & & \\
 & & & (\zeta_{\frac{s+2}{2}} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}} & ,\zeta_{\frac{s+2}{2}+1} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}+1}) &
\end{array}
$$

ζ führt $\frac{s+2}{2}$ Quadrupel an!

Lem. 2.20

$s+3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

$$\begin{array}{llllllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & & & \\
 & & & \vdots & & & & \\
 & & & (\zeta_{\frac{s+2}{2}} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}} & ,\zeta_{\frac{s+2}{2}+1} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}+1}) &
\end{array}$$

ζ führt $\frac{s+2}{2}$ Quadrupel an! η führt $\frac{s+2}{2} - 1$ Quadrupel an!

Lem. 2.20

$s + 3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

$$
\begin{array}{llllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & \\
 & & & \vdots & & \\
 & & (\zeta_{\frac{s+2}{2}} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}} & ,\zeta_{\frac{s+2}{2}+1} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}+1})
\end{array}
$$

ζ führt $\frac{s+2}{2}$ Quadrupel an! η führt $\frac{s+2}{2} - 1$ Quadrupel an!

Insgesamt: $2 \cdot (\frac{s+2}{2}) - 1 = s + 1$ Quadrupel

Lem. 2.20

$s+3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

$$
\begin{array}{llllllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & & & \\
 & & & \vdots & & & & \\
 & & & & (\zeta_{\frac{s+2}{2}} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}} & ,\zeta_{\frac{s+2}{2}+1} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}+1})
\end{array}
$$

ζ führt $\frac{s+2}{2}$ Quadrupel an! η führt $\frac{s+2}{2} - 1$ Quadrupel an!

Insgesamt: $2 \cdot (\frac{s+2}{2}) - 1 = s + 1$ Quadrupel

Noch zu zeigen: Jedes Quadrupel erzeugt Schnitt!

Lem. 2.20

Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

Situation wie folgt:

Lem. 2.20

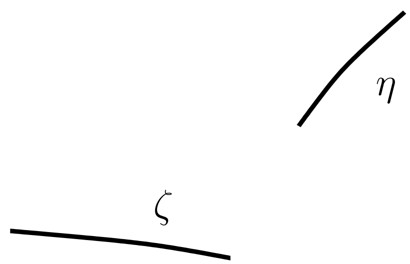
Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

Situation wie folgt:

Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

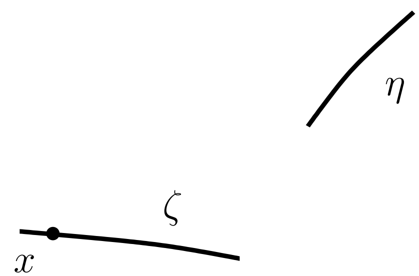
Situation wie folgt:



Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

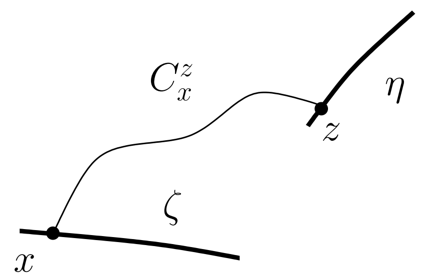
Situation wie folgt:



Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

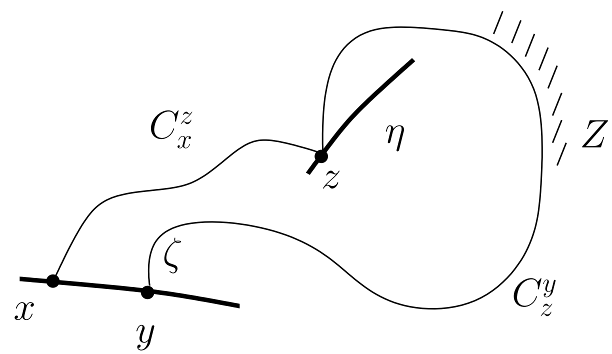
Situation wie folgt:



Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

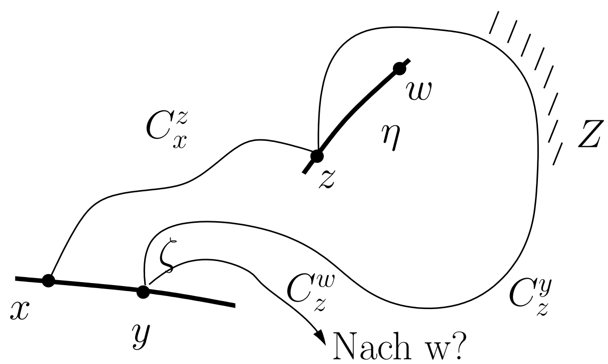
Situation wie folgt:



Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

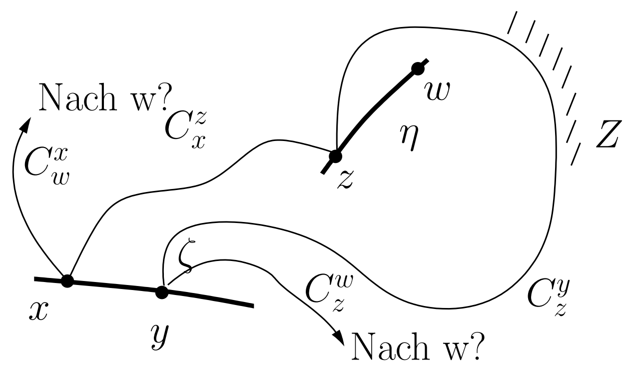
Situation wie folgt:



Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

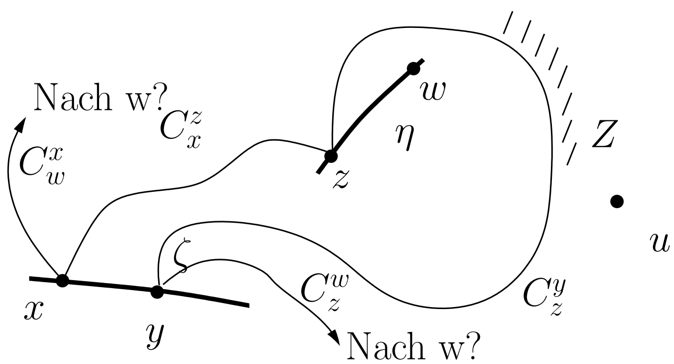
Situation wie folgt:



Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

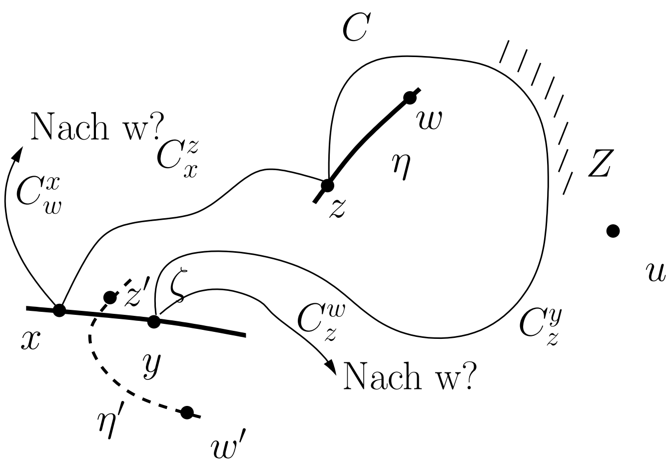
Situation wie folgt:



Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

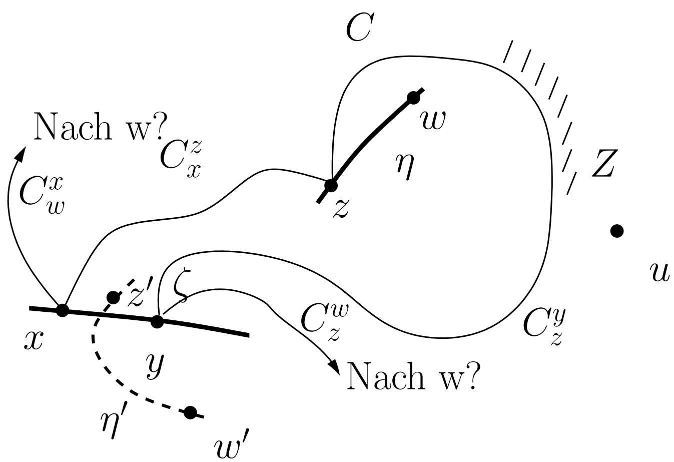
Situation wie folgt:



Lem. 2.20

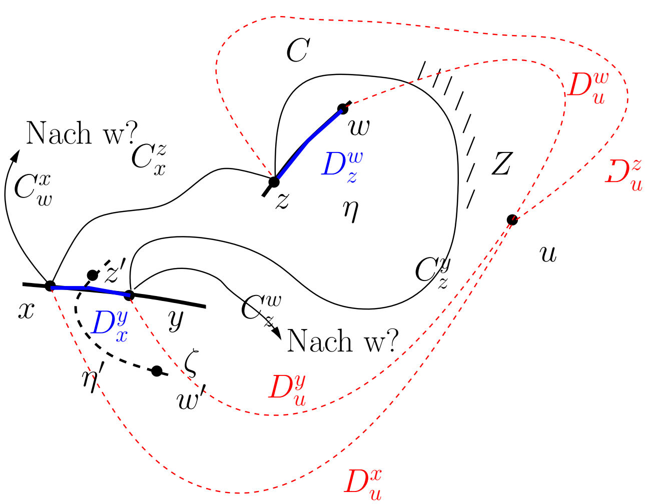
Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

Situation wie folgt:



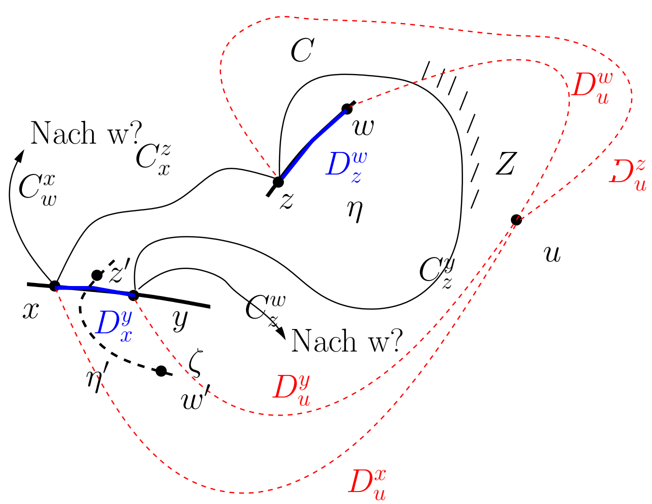
Zeige, dass Schnitt existieren muss!

Situation: u im Innern!



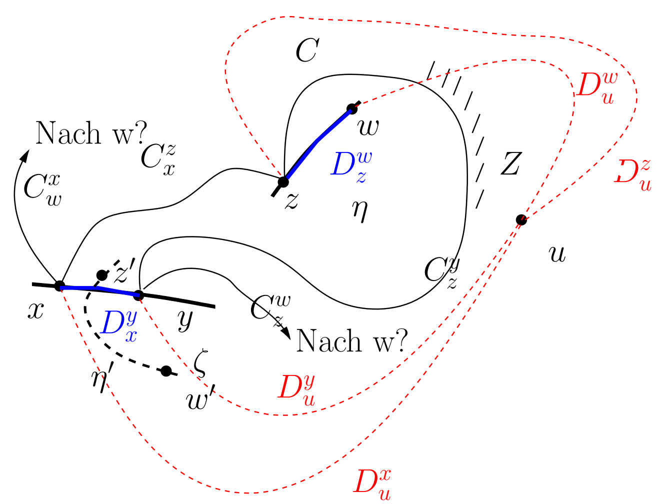
Situation: u im Innern!

- u *sieht* x, z, y, w



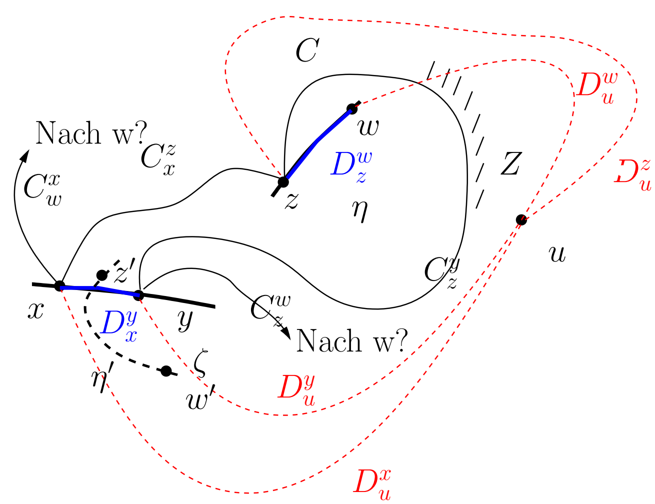
Situation: u im Innern!

- u *sieht* x, z, y, w
- Verb. D_u^x, D_u^z, D_u^y, D_u^w schnittfrei mit C_x^z, C_z^y, C_y^w, C_w^x
- Annahme: D_x^y und D_z^w schnittfrei



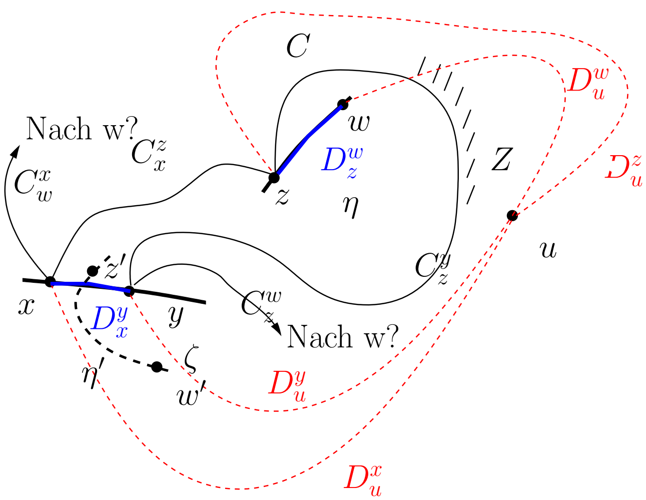
Situation: u im Innern!

- u *sieht* x, z, y, w
- Verb. D_u^x, D_u^z, D_u^y, D_u^w schnittfrei mit C_x^z, C_z^y, C_y^w, C_w^x
- Annahme: D_x^y und D_z^w schnittfrei $\Rightarrow$ alle schnittfrei!!



Situation: u im Innern!

- u *sieht* x, z, y, w
- Verb. D_u^x, D_u^z, D_u^y, D_u^w schnittfrei mit C_x^z, C_z^y, C_y^w, C_w^x
- Annahme: D_x^y und D_z^w schnittfrei $\Rightarrow$ alle schnittfrei!!
- Entspricht: $K5$ in der Ebene schnittfrei realisiert! Widerspruch!!



Konklusion: Lem. 2.20

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte:

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s+2)$

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s+2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s+3)$

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s+2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s+3)$
- $(s+3)$ Wechsel auf ζ und η,

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s+2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s+3)$
- $(s+3)$ Wechsel auf ζ und η, sukzessive

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s+2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s+3)$
- $(s+3)$ Wechsel auf ζ und η, sukzessive
- Bei jedem Quadrupel $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ (oder $(\eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}, \zeta_{i+2})$:

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s+2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s+3)$
- $(s+3)$ Wechsel auf ζ und η, sukzessive
- Bei jedem Quadrupel $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ (oder $(\eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}, \zeta_{i+2})$: Schnitt zwischen (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s+2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s+3)$
- $(s+3)$ Wechsel auf ζ und η, sukzessive
- Bei jedem Quadrupel $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ (oder $(\eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}, \zeta_{i+2})$: Schnitt zwischen (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})
- $s+1$ Quadrupel

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s+2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s+3)$
- $(s+3)$ Wechsel auf ζ und η, sukzessive
- Bei jedem Quadrupel $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ (oder $(\eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}, \zeta_{i+2})$: Schnitt zwischen (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})
- $s+1$ Quadrupel $\Rightarrow$ $s+1$ Schnitte,

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s + 2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s + 3)$
- $(s + 3)$ Wechsel auf ζ und η, sukzessive
- Bei jedem Quadrupel $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ (oder $(\eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}, \zeta_{i+2})$: Schnitt zwischen (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})
- $s + 1$ Quadrupel $\Rightarrow$ $s + 1$ Schnitte, Widerspruch!!

Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s + 2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s + 3)$
- $(s + 3)$ Wechsel auf ζ und η, sukzessive
- Bei jedem Quadrupel $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ (oder $(\eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}, \zeta_{i+2})$: Schnitt zwischen (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})
- $s + 1$ Quadrupel $\Rightarrow$ $s + 1$ Schnitte, Widerspruch!!
- DSS mit $(4n, s + 2)$

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen
- Je zwei schneiden sich s mal

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen
- Je zwei schneiden sich s mal
- X-monoton,

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen
- Je zwei schneiden sich s mal
- X-monoton, eventuell erzeugen

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen
- Je zwei schneiden sich s mal
- X-monoton, eventuell erzeugen
- Startpunkt x

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen
- Je zwei schneiden sich s mal
- X-monoton, eventuell erzeugen
- Startpunkt x
- Komplexität der Zelle Z_x:

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen
- Je zwei schneiden sich s mal
- X-monoton, eventuell erzeugen
- Startpunkt x
- Komplexität der Zelle Z_x: $\lambda_{s+2}(4n)$

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen
- Je zwei schneiden sich s mal
- X-monoton, eventuell erzeugen
- Startpunkt x
- Komplexität der Zelle Z_x: $\lambda_{s+2}(4n)$
- Divide and Conquer Ansatz sinnvoll

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.

- Zerlege Menge der Bögen in gleichgroße Teilmengen R und B.

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.

- Zerlege Menge der Bögen in gleichgroße Teilmengen R und B.
- Berechne rek. im Arrangement $A(R)$ Zelle $Z(R)_x$, die x enthält

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.

- Zerlege Menge der Bögen in gleichgroße Teilmengen R und B.
- Berechne rek. im Arrangement $A(R)$ Zelle $Z(R)_x$, die x enthält.
- Berechne rek. im Arrangement $A(B)$ Zelle $Z(B)_x$, die x enthält.

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.

- Zerlege Menge der Bögen in gleichgroße Teilmengen R und B.
- Berechne rek. im Arrangement $A(R)$ Zelle $Z(R)_x$, die x enthält.
- Berechne rek. im Arrangement $A(B)$ Zelle $Z(B)_x$, die x enthält.
- Berechne Zusammenhangskomponente Z_x von $Z(R)_x \cap Z(B)_x$, die x enthält und berichte diese!

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.

- Zerlege Menge der Bögen in gleichgroße Teilmengen R und B.
- Berechne rek. im Arrangement $A(R)$ Zelle $Z(R)_x$, die x enthält.
- Berechne rek. im Arrangement $A(B)$ Zelle $Z(B)_x$, die x enthält.
- Berechne Zusammenhangskomponente Z_x von $Z(R)_x \cap Z(B)_x$, die x enthält und berichte diese! RED-BLUE Merge

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.

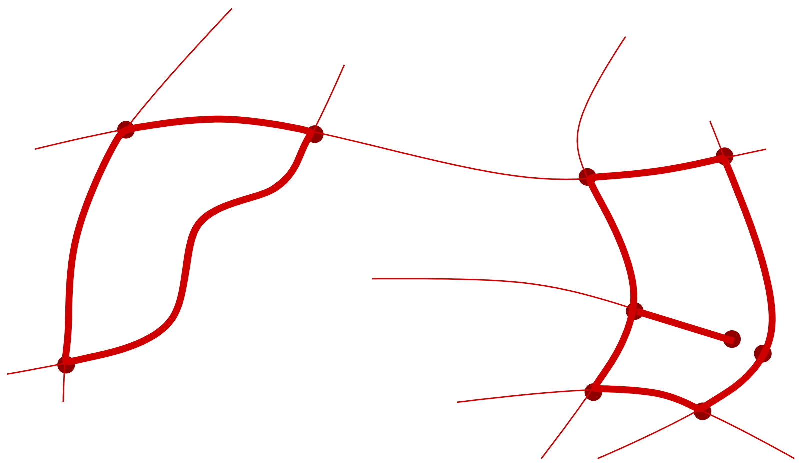
- Zerlege Menge der Bögen in gleichgroße Teilmengen R und B.
- Berechne rek. im Arrangement $A(R)$ Zelle $Z(R)_x$, die x enthält.
- Berechne rek. im Arrangement $A(B)$ Zelle $Z(B)_x$, die x enthält.
- Berechne Zusammenhangskomponente Z_x von $Z(R)_x \cap Z(B)_x$, die x enthält und berichte diese! RED-BLUE Merge

Zuerst RED-BLUE Merge betrachten, dann zurück!

Allgemeiner RED-BLUE Merge

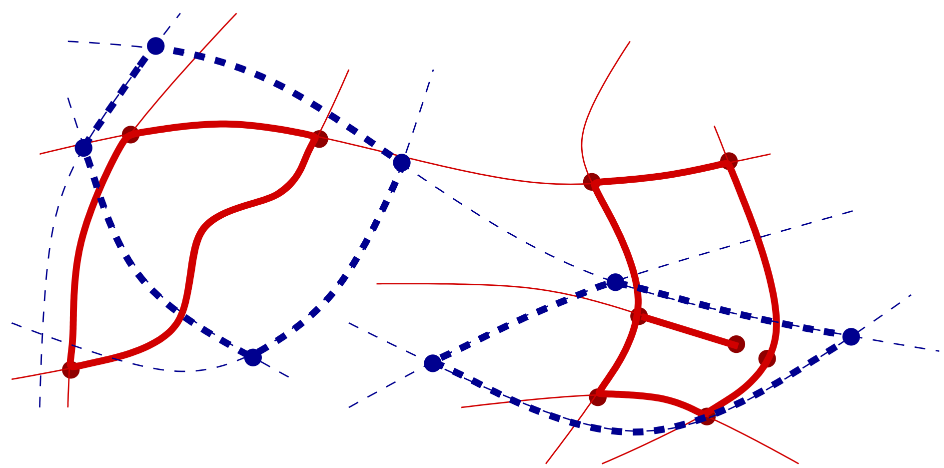
Allgemeiner RED-BLUE Merge

- Rotes Arrangement R mit Zellen $R_1, \ldots, R_{m_R}$, r Ecken.



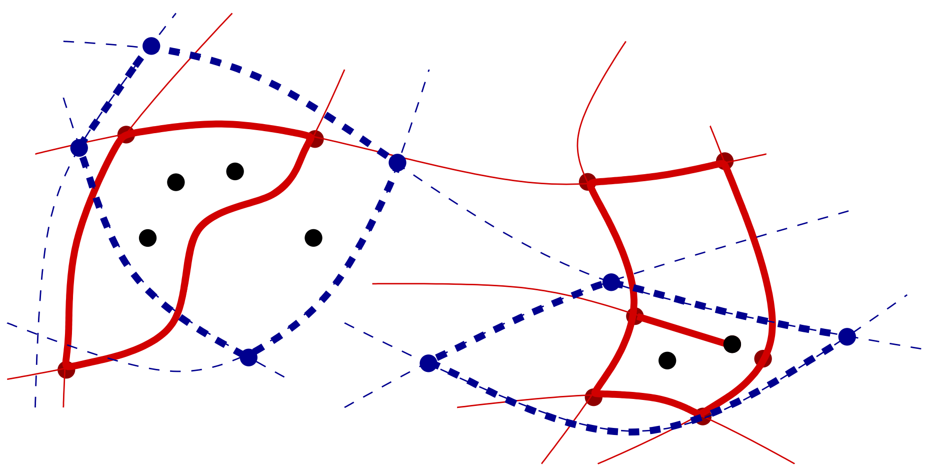
Allgemeiner RED-BLUE Merge

- Rotes Arrangement R mit Zellen $R_1, \ldots, R_{m_R}$, r Ecken.
- Blaues Arrangement B mit Zellen $B_1, \ldots, B_{m_B}$, b Ecken.



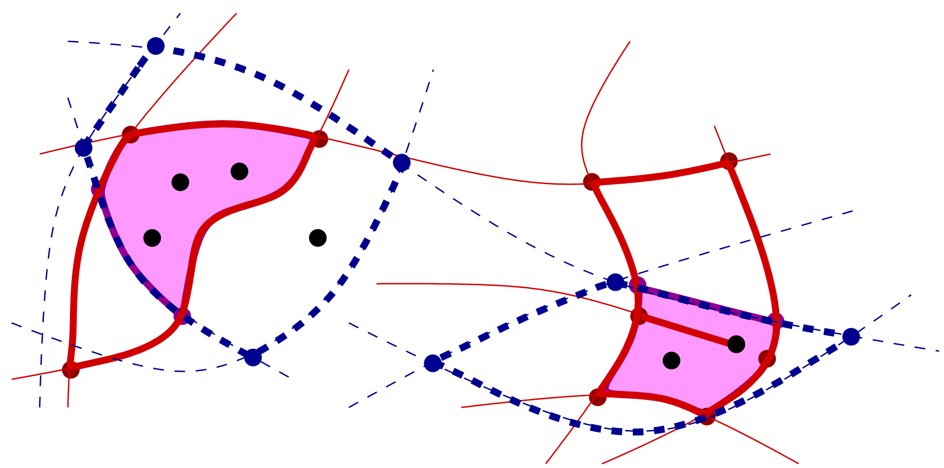
Allgemeiner RED-BLUE Merge

- Rotes Arrangement R mit Zellen $R_1, \ldots, R_{m_R}$, r Ecken.
- Blaues Arrangement B mit Zellen $B_1, \ldots, B_{m_B}$, b Ecken.
- Punktmenge p_i $i = 1, \ldots, k$



Allgemeiner RED-BLUE Merge

- Rotes Arrangement R mit Zellen $R_1, \ldots, R_{m_R}$, r Ecken.
- Blaues Arrangement B mit Zellen $B_1, \ldots, B_{m_B}$, b Ecken.
- Punktmenge p_i $i = 1, \ldots, k$
- Schnittzellen $Z_j = R_{\mu_j} \cap B_{\nu_j}$, $j = 1, \ldots, l$, die mind. ein p_i enthalten



Komplexität der Schnittzellen: Lem. 2.21

Komplexität der Schnittzellen: Lem. 2.21

Kombinationslemma: Guibas,Sharir,Sifrony 1989 (DSS *Bibel*)

Komplexität der Zellen $Z_1, \ldots, Z_\ell$, $\ell \leq k$:

$$|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_\ell| \in O(r + b + k)$$

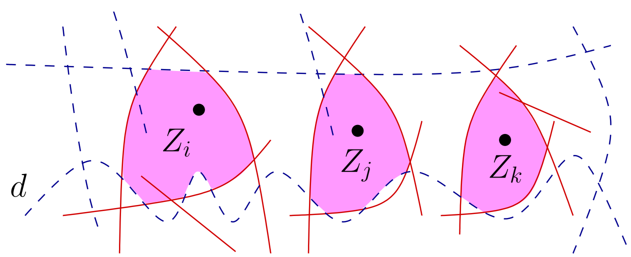
Komplexität der Schnittzellen: Lem. 2.21

Kombinationslemma: Guibas,Sharir,Sifrony 1989 (DSS *Bibel*)

Komplexität der Zellen $Z_1, \ldots, Z_\ell$, $\ell \leq k$:

$$|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_\ell| \in O(r + b + k)$$

Nicht trivial:



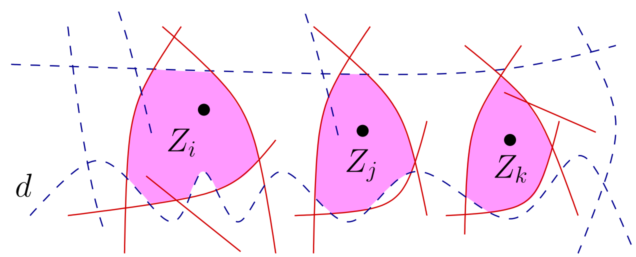
Komplexität der Schnittzellen: Lem. 2.21

Kombinationslemma: Guibas,Sharir,Sifrony 1989 (DSS *Bibel*)

Komplexität der Zellen $Z_1, \ldots, Z_\ell$, $\ell \leq k$:

$$|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_\ell| \in O(r + b + k)$$

Nicht trivial:



Zur Analyse der Berechnung verwenden!!!