**Abgabe: 12.01.2016, 10:15 Uhr**

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt
Clemens Rösner
*Institut für Informatik*

# Übungsblatt 9

## Aufgabe 9.1

4 Punkte

Zeigen Sie mittels Diagonalisierung, dass die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

## Aufgabe 9.2

3 Punkte

Gegeben seien $n$ natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_n$ mit $\sum_{k=1}^n a_k \leq 2^n - 2$. Zeigen Sie, dass es dann zwei nichtleere Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i$ gibt.

*Hinweis*: Verwenden Sie das Schubfachprinzip.

## Aufgabe 9.3

2+2 Punkte

(a) Seien $k$ und $n$ natürliche Zahlen, $\Sigma$ ein Alphabet und $z \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge $n$. Wie viele Zerlegungen $z = u_1 \dots u_k$ von $z$ in Wörter $u_i \in \Sigma^*$ gibt es?

(b) Wie viele verschiedene Wörter kann man durch das Permutieren der Zeichen des Wortes $w = \text{BANANE}$ erhalten?

## Aufgabe 9.4

3+3+3 Punkte + 3 Zusatzpunkte

(a) Wir betrachten die Relation $\sim$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, gegeben durch

$$A \sim B \iff A \text{ und } B \text{ sind gleichmächtig}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Cantorsche Paarungsfunktion $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gegeben durch

$$g(x, y) = \frac{(x + y - 2) \cdot (x + y - 1)}{2} + y\,,$$

bijektiv ist.

*Hinweis*: Nutzen Sie die alternative Darstellung $g(x, y) = y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k$.

(c) Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $A \times B$ zweier abzählbar unendlicher Mengen $A$ und $B$ abzählbar unendlich ist.

(d) Seien $A_1, A_2, \dots$ abzählbar unendliche Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch die Vereinigung $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ abzählbar unendlich ist.

## Aufgabe 9.5

3 Zusatzpunkte

Sei $A$ eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $B \subseteq A$ existiert, sodass $B$ abzählbar unendlich ist.