

Probeklausur

Bitte beachten Sie folgende Hinweise: Beachten Sie, dass diese Probeklausur nur eine exemplarische Sammlung von möglichen Klausuraufgaben darstellt. Die Probeklausur hat keinerlei Einfluss auf die Prüfungszulassung oder die endgültige Note. Sie können bis zu zwei Aufgaben bei Ihrem Tutor im Tutorium abgeben um diese korrigieren zu lassen.

Aufgabe 1:

- a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- b) Seien M und N Mengen mit jeweils mindestens zwei Elementen und sei $f: M \rightarrow N$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, dass f surjektiv ist?

- (i) $\exists x \in M \forall y \in N: f(x) = y$
- (ii) $\forall y \in N \exists x \in M: f(x) = y$
- (iii) $\forall x \in M \exists y \in N: f(x) = y$
- (iv) $\forall y \in N: (\forall x \in M: f(x) \neq y) \rightarrow y \neq y$
- (v) $\neg \exists y \in N \forall x \in M: f(x) \neq y$
- (vi) $\forall y \in N \neg \forall x \in M: f(x) \neq y$

- c) Seien M und N nichtleere endliche Mengen mit $|M| = |N|$ und sei $f: M \rightarrow N$ eine injektive Funktion von M nach N . Zeigen Sie, dass dann f bijektiv ist.

- d) Zeigen Sie, dass die Relation $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M = \{a, b, c\}$ ist.

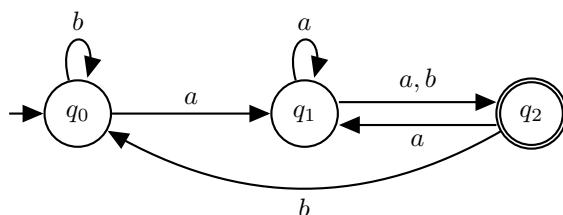
Geben Sie die Elemente der Äquivalenzklasse an, die das Element a enthält.

- e) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Wie viele symmetrische und gleichzeitig antisymmetrische Relationen $R \subseteq M \times M$ auf der Menge M gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2:

- a) Benennen Sie die fünf Komponenten, aus denen ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) besteht. Geben sie bei Funktionen und Relationen stets den Definitions- und den Bildbereich an.

- b) Welche Sprache entscheidet der unten abgebildete NFA? Geben Sie einen DFA an, der dieselbe Sprache entscheidet. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



- c) Geben Sie das Pumping-Lemma an.
- d) Ist jede Untermenge $L' \subseteq L$ einer regulären Sprache L stets regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!
- e) Sei $L = \{w \in \Sigma^+ : ||w|_a - |w|_b| \leq 1\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Ist L regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.
- f) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid (|w|_a \text{ ist gerade}) \vee (|w|_b = 1)\}$ erzeugt.

Aufgabe 3:

- a) Sei M eine überabzählbare Menge und sei $N \subseteq M$ eine abzählbare Teilmenge. Zeigen Sie, dass $M \setminus N$ überabzählbar ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ abzählbar ist.
- c) Beweisen Sie, dass die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} := \{f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ der Funktionen von den natürlichen Zahlen in die Menge $\{0, 1\}$ überabzählbar ist.
- d) Auf wie viele verschiedene Arten können beim Skat die Buben verteilt werden. Begründen Sie Ihre Antwort. (Es gibt beim Skat 4 verschiedene Buben, alle Karten werden verteilt, 3 Spieler erhalten jeweils 10 Karten und 2 Karten werden verdeckt in den Skat verteilt.)

Aufgabe 4:

- a) Sei $A = \{1, 2, \dots, n\}$ für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für die Struktur $S = (A, \bullet)$ mit $a \bullet b := \min\{a, b\}$ für $a, b \in A$ an, ob es sich um eine Halbgruppe, einen Monoid oder eine Gruppe handelt und ob die Verknüpfung kommutativ ist.
- b) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und sei 0 das neutrale Element der Addition. Zeigen Sie, dass 0 kein multiplikatives Inverses besitzt.
- c) Bestimmen Sie das Inverse von $[15]_{22}$ in $(\mathbb{Z}/22\mathbb{Z}, \odot_{22})$
- d) Bestimmen Sie mithilfe des chinesischen Restsatzes eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ mit $17x \equiv 4 \pmod{23}$ und $23x \equiv 15 \pmod{17}$.

Aufgabe 5:

- a) Erstellen sie eine Wahrheitstabelle für die aussagenlogische Formel

$$\varphi = (((x_1 \wedge \neg x_2) \vee \neg(x_1 \wedge x_3)) \wedge (\neg x_3 \vee x_2)) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

- b) Entscheiden Sie für die folgenden Formeln, ob sie jeweils erfüllbar, gültig oder unerfüllbar sind.

(i) $(x_2 \vee ((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3))$

(ii) $((x_1 \rightarrow x_2) \leftrightarrow (\neg x_2 \rightarrow \neg x_1))$

(iii) $((x_1 \rightarrow x_2) \leftrightarrow ((x_1 \wedge \neg x_2) \rightarrow \mathbf{0}))$

- c) Sei $\varphi = (\neg(x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge (\neg x_3 \vee x_1))$.

(i) Bestimmen Sie anhand einer Wahrheitstafel eine zu φ äquivalente aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform.

(ii) Bestimmen Sie mithilfe des ERZUEGEKNF-Algorithmus aus der Vorlesung eine zu φ äquivalente aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform.

- d) Zeigen Sie, dass die aussagenlogische Formel

$$\varphi_1 = \neg x_2 \vee \neg(\neg x_1 \leftrightarrow \neg x_3) \text{ und}$$

$$\varphi_2 = (((\neg x_1 \wedge (x_1 \leftrightarrow x_2)) \vee (x_1 \wedge (\neg x_1 \leftrightarrow x_2))) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3))$$

äquivalent zueinander sind.