Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2016/17

Abgabe: 10.01.17 bis 10.15 Uhr
Besprechung: 16.01.-20.01.17

Prof. Dr. Stefan Kratsch
Eva-Maria Hols
Institut für Informatik

Übungsblatt 10

Alle Punkte auf diesem Zettel sind Zusatzpunkte!

Aufgabe 10.1: Potenzmenge (4 Punkte)

Zeigen Sie mittels Diagonalisierung, dass die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

Aufgabe 10.2: Schubfachprinzip (3 Punkte)

Gegeben seien n natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 2^n - 2$. Zeigen Sie, dass es dann zwei nichtleere Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i$ gibt.

Hinweis: Verwenden Sie das Schubfachprinzip.

Aufgabe 10.3: Abzählbarkeit (3+3+3 Punkte)

a) Wir betrachten die Relation $\sim$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, gegeben durch

$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind gleichmächtig.}$$

Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeigen Sie, dass die Cantorsche Paarungsfunktion $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gegeben durch

$$g(x, y) = \frac{(x + y - 2) \cdot (x + y - 1)}{2} + y,$$

bijektiv ist.

Hinweis: Nutzen Sie die alternative Darstellung $g(x, y) = y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k$.

c) Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $A \times B$ zweier abzählbar unendlicher Mengen A und B abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 10.4: Abzählbar unendlich (4 Punkte)

Sei A eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $B \subseteq A$ existiert, sodass B abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 10.5: Beispiele abzählbarer und überabzählbarer Mengen (2+2+2 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind abzählbar unendlich und welche sind überabzählbar? Beweisen Sie ihre Antwort.

a) $F_1 = \{f\colon \{0, 1\} \to \mathbb{R}\}$, die Menge der Funktionen von $\{0, 1\}$ nach $\mathbb{R}$.

b) $F_2 = \{f\colon \{0, 1, 2\} \to \mathbb{N}\}$, die Menge der Funktionen von $\{0, 1, 2\}$ nach $\mathbb{N}$.

c) $F_3 = \{f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}\}$, die Menge der Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\{0, 1, 2\}$.