

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1: Wege im Gitter

(1+1.5+1.5 Punkte)

Wir betrachten ein Gitter $G = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ mit $m, n \geq 20$. Wir starten in Punkt $(1, 1)$ und wollen uns in G bewegen. Zu jedem Zeitpunkt dürfen wir uns einen Schritt in x -Richtung (von (x, y) nach $(x + 1, y)$) oder einen Schritt in y -Richtung (von (x, y) nach $(x, y + 1)$) bewegen, sofern wir G nicht verlassen.

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, zu Punkt (m, n) zu gelangen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, zu Punkt (m, n) zu gelangen, ohne über Punkt $(10, 10)$ zu laufen?
- Wie viele mögliche Wege gibt es, die in einem Punkt (x, y) mit $y = n$ enden und die keinen weiteren Punkt (x', y') mit $y' = n$ enthalten?

Aufgabe 11.2: Verteilung von Luftballons

(1+1.5+1.5 Punkte)

Es sollen a Luftballons an b Kinder verteilt werden. Luftballons mit derselben Farbe sollen dabei nicht unterschieden werden. Wie viele Möglichkeiten einer solchen Verteilung gibt es, wenn

- alle Ballons rot sind,
- es r rote und $a - r$ blaue Ballons gibt,
- alle Ballons verschiedene Farben haben?

Aufgabe 11.3: Wörter einer Sprache

(2+2 Punkte)

- Seien a und b natürliche Zahlen, Σ ein Alphabet und $z \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge b . Wie viele Zerlegungen $z = u_1 \dots u_a$ von z in Wörter $u_i \in \Sigma^*$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Wie viele verschiedene Wörter kann man durch das Permutieren der Zeichen des Wortes $w = \text{BANANE}$ erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 11.4: Abzählende Kombinatorik

(1.5+1.5+1.5+1.5 Punkte)

Geben Sie im folgenden Ihren Rechenweg und das Ergebnis an.

- Bei der Fußball-WM 2014 nahmen 32 Nationen teil. Wie viele Möglichkeiten gab es
 - für die Teilnehmer des Halbfinals (= Runde der letzten 4)?
 - für die Reihenfolge auf den ersten 4 Plätzen?
- Ein Autokennzeichen besteht aus mindestens einem und maximal zwei Buchstaben des Alphabets (26 Buchstaben) sowie einer Zahl bestehend aus mindestens zwei und maximal drei Zahlen, wobei die Null nicht an erster Stelle stehen darf. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichen Kennzeichen, wenn
 - ein Buchstabe auch mehrmals erscheinen darf.
 - ein Buchstabe maximal einmal erscheinen darf.
- Im Parlament eines Landes gibt es 151 Sitze und drei Parteien. Wie viele Möglichkeiten (i, j, k) der Sitzverteilung gibt es, so dass keine Partei eine absolute Mehrheit hat?

- d) Herr Reichlich stirbt unerwartet und nimmt das Codewort zu seinem Tresor mit ins Grab. Seine Angehörigen wissen nur, dass der Code 5-stellig ist und genau 3 Ziffern enthält, unter denen die Ziffern 0 und 4 nicht vorkommen. Wie viele Codewörter erfüllen diese Bedingung?

Aufgabe 11.5: Gruppenaxiome

(2+2+2+2 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Strukturen mit Begründung an, ob es sich um eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe handelt und ob die Verknüpfung kommutativ ist.

- a) $(\mathbb{Z}, \&)$ mit $x \& y = 2x + y$
- b) $(\mathbb{Z}, *)$ mit $x * y = x + y - 1$
- c) $(\mathbb{R}^2, \#)$ mit $(x_1, x_2) \# (y_1, y_2) = (x_1, y_2)$
- d) $(\{0, 1\}^n, \bullet)$ mit $(a_1, \dots, a_n) \bullet (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$