Abgabe: 08.11.16 bis 10.15 Uhr
Besprechung: 14.11.16-18.11.16

Prof. Dr. Stefan Kratsch
Eva-Maria Hols
Institut für Informatik

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1: Aussagenlogik (2+2 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle folgende Aussagen:

a) $(A \to B) \to C \not\equiv A \to (B \to C)$; das heißt die Verknüpfung von Aussagen mittels $\to$ ist nicht assoziativ.

b) $(A \to B) \to C \not\equiv (A \to B) \wedge (B \to C)$ und $A \to (B \to C) \not\equiv (A \to B) \wedge (B \to C)$; das heißt wir können statt $A \vDash B \vDash C$ nicht schreiben, dass $A \to B \to C$ gilt, unabhängig davon wie Klammern gesetzt werden. (Allerdings ist $A \vDash B$ gleichbedeutend dazu, dass die Aussage $A \to B$ gilt, und $A \vDash B \vDash C$ ist gleichbedeutend damit, dass $A \to B$ und $B \to C$ gelten.)

Aufgabe 3.2: Aussagen zu Mengen (2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe von Aussagenlogik die folgenden Eigenschaften von Mengen. (Verwenden Sie dazu die Definitionen der Mengenoperationen, mit elementaren Aussagen wie $x \in A$, und formen Sie diese geeignet um.)

a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Aufgabe 3.3: Beweise mit oder ohne Induktion (3+3+3+3 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen wahlweise mit oder ohne vollständige Induktion.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}_{>1}$ gilt $\sum\limits_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} i^3$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt $\prod\limits_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n}$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} i$.

Aufgabe 3.4: Induktion (4 Punkte)

Die Abbildung $T \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch $T(1) = 1$ und $T(n) = T(n-1) + n$ für $n \geq 2$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $T(n) \leq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.