Abgabe: 22.11.16 bis 10.15 Uhr
Besprechung: 28.11.-02.12.16

Prof. Dr. Stefan Kratsch
Eva-Maria Hols
Institut für Informatik

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1: Eigenschaften von Relationen (4+3 Punkte)

a) Betrachten Sie die folgenden zwei Relationen und zeigen Sie, welche der aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften sie besitzen.

(i) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $xRy \Leftrightarrow x = y = 0$ oder $xy > 0$

(ii) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = y_1 x_2$

b) Beweisen Sie, dass die Relation $\sim$ mit

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \colon (\mu a = \lambda c) \wedge (\mu b = \lambda d)$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{Z}^2$ ist.

Aufgabe 5.2: Beispiele für Funktionen (5 Punkte)

Eine Funktion kann die Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv haben. Geben Sie (ohne Begründung) für jede der folgenden Funktionen an, welche dieser Eigenschaften erfüllt sind und welche nicht.

a) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$

b) $f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$

c) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$

d) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \mapsto x^2$

e) $f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \mapsto x^3$

f) $f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(x, y) \mapsto (2x - 2y, x + y)$

g) $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto (2x - 2y, x + y)$

h) $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto (2x - 2y, x - y)$

i) $f \colon \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$

j) $f \colon \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$ mit $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$

Aufgabe 5.3: Abbildungen (3+2 Punkte)

a) Geben Sie für die folgenden Abbildungen an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind und beweisen Sie ihre Antwort.

(i) $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $g \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen M

(iii) $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = xy$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

b) Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ an und zeigen Sie, dass ihre Abbildung bijektiv ist.

Aufgabe 5.4: Eigenschaften von Abbildungen I (3 Punkte)

Seien A, B endliche aber nichtleere Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und $A' \supseteq A$, dann gibt es eine Abbildung $g : A' \to B$, so dass für alle $a \in A$ $f(a) = g(a)$ gilt.

b) Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und $B' \supseteq B$, dann gibt es eine Abbildung $g : A \to B'$, so dass für alle $a \in A$ $f(a) = g(a)$ gilt.

c) Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und $B' \subseteq B$, dann gibt es eine Abbildung $g : A \to B'$, so dass für alle $a \in A$ $f(a) = g(a)$ gilt.

Aufgabe 5.5: Eigenschaften von Abbildungen II (2+4 Punkte)

a) Seien $f\colon N \to P$ und $g\colon M \to N$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch die Verknüpfung $f \circ g\colon M \to P$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ eine Abbildungen ist.

b) Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ mit $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in M$ und $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in N$? Beweisen Sie ihre Antwort.