Abgabe: 29.11.16 bis 10.15 Uhr
Besprechung: 05.12.-09.12.16

Prof. Dr. Stefan Kratsch
Eva-Maria Hols
Institut für Informatik

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1: Eigenschaften von Äquivalenzrelationen (2 Punkte)

Äquivalenzrelationen sind bekanntlich Relationen, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1. Reflexivität: $a \sim a$
2. Symmetrie: $a \sim b \quad \rightarrow \quad b \sim a$
3. Transitivität: $a \sim b$ und $b \sim c \quad \rightarrow \quad a \sim c$

Ist es dabei wirklich erforderlich, die Reflexivität explizit zu fordern? Wenn $a \sim b$ gilt, so folgt doch schließlich aus der Symmetrie auch $b \sim a$. Aber $a \sim b$ und $b \sim a$ zusammen garantieren durch die Transitivität, dass auch $a \sim a$ gelten muss.

Wo ist der Fehler in dieser Argumentation?

Aufgabe 6.2: Äquivalenzrelationen (2+3+2 Punkte)

Seien M und N nichtleere Mengen und sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist S eine Äquivalenzrelation auf N, dann ist durch

$$x \, R \, y \Leftrightarrow f(x) \, S \, f(y)$$

eine Äquivalenzrelation R auf M definiert.

b) Ist R eine Äquivalenzrelation auf M und ist f bijektiv, dann ist durch

$$y_1 \, S \, y_2 \Leftrightarrow \exists \, x_1,\, x_2 \in M\colon y_1 = f(x_1),\, y_2 = f(x_2) \text{ und } x_1 \, R \, x_2$$

eine Äquivalenzrelation S auf N definiert.

c) An welchen Stellen im Beweis von Aufgabenteil b) werden die Surjektivität bzw. die Injektivität von f benötigt? Geben Sie für den Fall, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist, und für den Fall, dass f surjektiv, aber nicht injektiv ist, jeweils ein Gegenbeispiel zu der Behauptung aus Aufgabenteil b) an.

Aufgabe 6.3: Äquivalenzklassen (3+4 Punkte)

a) Sei M eine Menge und $\mathcal{P}$ eine Partition von M. Sei eine Relation R auf M definiert durch: $(a, b) \in R \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{P}\colon a \in X \wedge b \in X$.

- **(i)** Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf M ist.
- **(ii)** Geben Sie die Äquivalenzklassen von R an.

b) Betrachten Sie folgende Relation R auf $\mathbb{R}^2$ mit $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ genau dann, wenn die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) den gleichen Abstand zum Ursprung haben, dass heißt $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

- **(i)** Zeigen Sie, dass es sich bei R um eine Äquivalenzrelation handelt.
- **(ii)** Beschreiben Sie die Menge der Äquivalenzklassen von R indem Sie für jede Äquivalenzklassen genau einen Repräsentanten angeben und zeigen Sie, dass die Menge der Äquivalenzklassen eine Partition von $\mathbb{R}^2$ ist.
- **(iii)** Wie sehen die Äquivalenzklassen geometrisch aus?

Aufgabe 6.4: Addition auf Äquivalenzklassen (2+2+2+4 Punkte)

Betrachten Sie die Relation $R \subseteq (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \times (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$ mit $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Sei $\mathcal{K}$ die Menge der Äquivalenzklassen der Relation R.

a) Zeigen Sie, dass die Relation R eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist.

b) Beschreiben Sie die Menge der Äquivalenzklassen von R indem Sie für jede Äquivalenzklassen genau einen Repräsentanten angeben und zeigen Sie, dass die Menge der Äquivalenzklassen eine Partition von $\mathbb{N}_0^2$ ist.

c) Wir definieren eine Operation $\oplus$ auf Äquivalenzklassen durch $\oplus\colon\ ([(a, b)], [(c, d)]) \mapsto [(a+c, b+d)]$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\oplus$ wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

Bemerkung: Für zwei Elemente $x, y \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ können Sie $[x] \oplus [y]$ anstatt $\oplus([x], [y])$ schreiben.

d) Geben Sie eine bijektive Abbildung $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{Z}$ an, sodass für alle $[x], [y] \in \mathcal{K}$ gilt: $f([x] \oplus [y]) = f([x]) + f([y])$ und zeigen Sie, dass Ihre Funktion die beiden Eigenschaften erfüllt.

Bemerkung: Eine solche Abbildung nennt man Isomorphismus.