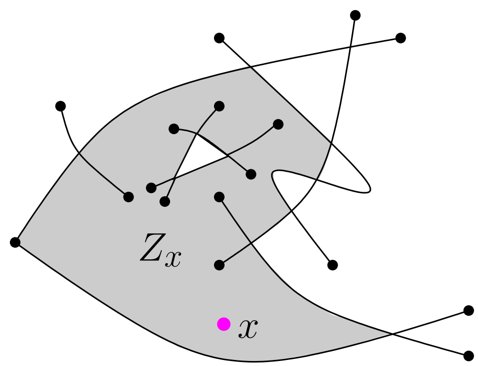
Offline Bewegungsplanung: Zellen eines Konfigurationsraumes

Elmar Langetepe
University of Bonn

Zellen: Th. 2.18

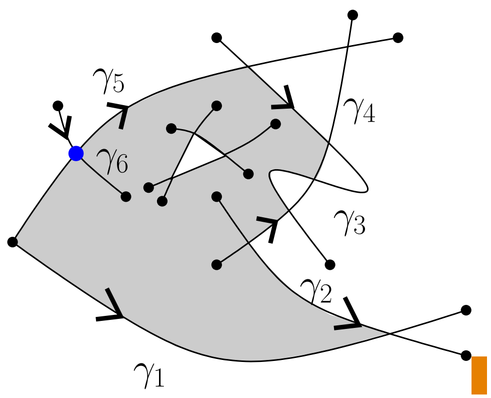
A Arrangement von n Kurvenstücken von denen sich zwei nur s mal schneiden. Jede Zelle von A hat Komplexität $O(\lambda_{s+2}(n))$.

Weniger als $\Omega(n^2)$!! Beweis!!



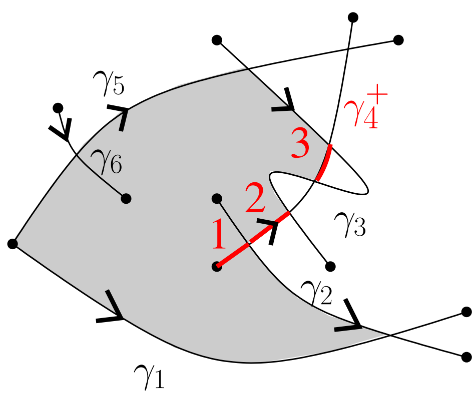
Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente
- Bezeichnen, orientieren: links nach rechts
- Zyklische Abfolge
  $S =< \gamma_5^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_5^- \gamma_6^+ \gamma_6^- >$
- $2n$ Segmente γ_i^-,γ_i^+



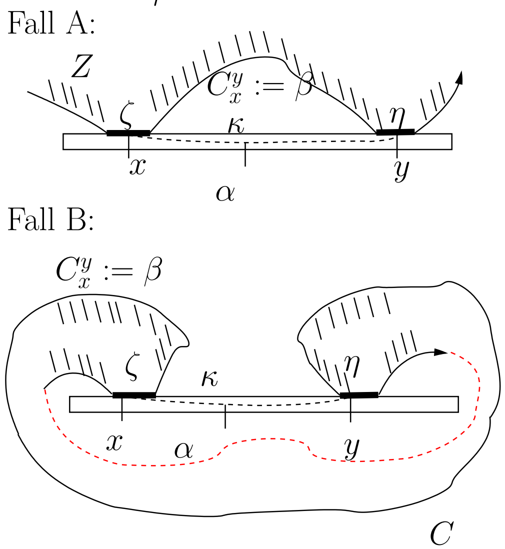
Bogenteile in Reihenfolge! Lem. 2.19

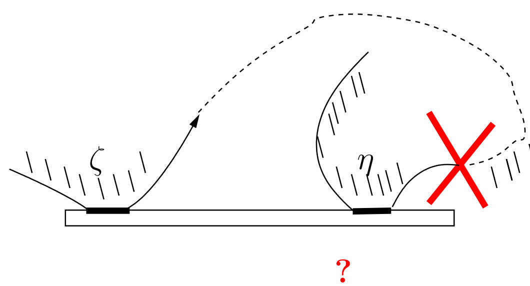
- Zyklische *Folge* des Zykels C:
  $S = < \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$
- Bogen γ_i: Segmente von $\gamma_i^+(\gamma_i^-)$ erscheinen in C in derselben Reihenfolge wie entlang von $\gamma_i^+(\gamma_i^-)$
- Beispiel γ_4^+! Beweis!



Beweis: Konsistenzlemma 2.19

- γ_i etwas aufblasen; $\zeta, \eta \in \gamma_i^*$ konsekutive Subsegmente in C!
- Nur zwei Fälle gemäß Innerem; sonst keine Verbindung!!
- Betrachte α und $\beta := C_x^y$
- β berührt γ_i^* nicht: Konsekutiv in C!
- C schnittfrei: $\alpha \cup \beta$ trennt κ von C ab





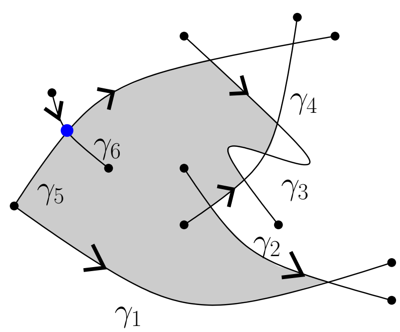
Lineare Sequenz S'' bilden!

- Zyklische Sequenz:

  $S =< \gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^- >$ auftrennen
- Orientierte Sequenz:

  $S' = \{\gamma_5^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_5^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^-\}$
- Orientierte Reihenfolge stimmt nicht! Bsp.:γ_5^-
- Verdoppeln: $\gamma_i^- \; (\gamma_i^+) \Rightarrow \gamma_{i,1}^-, \, \gamma_{i,2}^- (\gamma_{i,1}^+, \, \gamma_{i,2}^+)$
- Nun 4n Segmente: Sequenz

  $S'' = \{\gamma_{5,1}^- \, \gamma_1^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_4^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_2^- \, \gamma_2^+ \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_4^+ \, \gamma_3^- \, \gamma_{5,2}^- \, \gamma_6^+ \, \gamma_6^-\}$



S'' DSS mit $(4n, s+2)$: Lem. 2.20

- Definition DSS
- Zwischen zwei $\gamma_{i,j}^{-}(\gamma_{i,j}^{+})$ kommt stets anderes Segment vor
- Zz.: Zwei Buchstaben ζ und η wechseln nicht mehr als $s+2$ mal
- Widerspruchsbeweis: Annahme $s+3$ Wechsel!
- Situation:
  $S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots \cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots))$

Lem. 2.20

$S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots\cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots))$

Fasse je vier zusammen:

$$\begin{array}{llllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & \\
 & & (\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3, & \eta_3) \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

Jeweils Schnitt zw. $((\zeta_1, \zeta_2), (\eta_1, \eta_2))$, $((\eta_1, \eta_2), (\zeta_2, \zeta_3))$,...

$s + 3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

($(s + 3)$ gerade Übung!)

Lem. 2.20

$s+3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

$$
\begin{array}{llllllll}
(\zeta_1 & ,\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2) & & & & \\
 & (\eta_1 & ,\zeta_2 & ,\eta_2, & \zeta_3) & & & \\
 & & & \vdots & & & & \\
 & & & & (\zeta_{\frac{s+2}{2}} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}} & ,\zeta_{\frac{s+2}{2}+1} & ,\eta_{\frac{s+2}{2}+1})
\end{array}
$$

ζ führt $\frac{s+2}{2}$ Quadrupel an! η führt $\frac{s+2}{2} - 1$ Quadrupel an!

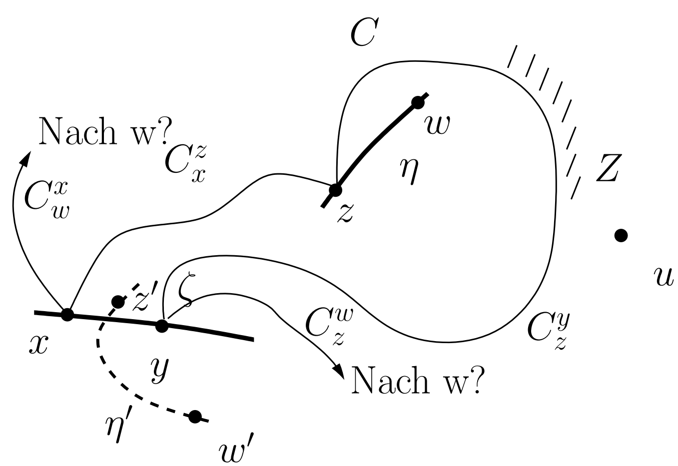
Insgesamt: $2 \cdot (\frac{s+2}{2}) - 1 = s + 1$ Quadrupel

Noch zu zeigen: Jedes Quadrupel erzeugt Schnitt!

Lem. 2.20

Zu zeigen: O.B.d.A: $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ erzeugt einzelnen Schnitt zw. (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})

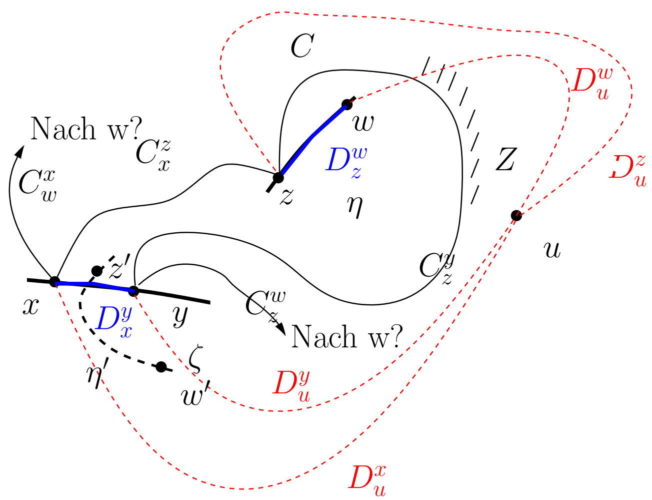
Situation wie folgt:



Zeige, dass Schnitt existieren muss!

Situation: u im Innern!

- u *sieht* x, z, y, w
- Verb. D_u^x, D_u^z, D_u^y, D_u^w schnittfrei mit C_x^z, C_z^y, C_y^w, C_w^x
- Annahme: D_x^y und D_z^w schnittfrei $\Rightarrow$ alle schnittfrei!!
- Entspricht: $K5$ in der Ebene schnittfrei realisiert! Widerspruch!!



Konklusion: Lem. 2.20

- n Bögen, je s Schnitte: Zeige: DSS mit $(4n, s+2)$
- Annahme: DSS mit mind. $(4n, s+3)$
- $(s+3)$ Wechsel auf ζ und η, sukzessive
- Bei jedem Quadrupel $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ (oder $(\eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}, \zeta_{i+2})$: Schnitt zwischen (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})
- $s+1$ Quadrupel $\Rightarrow$ $s+1$ Schnitte, Widerspruch!!
- DSS mit $(4n, s+2)$

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen
- Je zwei schneiden sich s mal
- X-monoton, eventuell erzeugen
- Startpunkt x
- Komplexität der Zelle Z_x: $\lambda_{s+2}(4n)$
- Divide and Conquer Ansatz sinnvoll

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

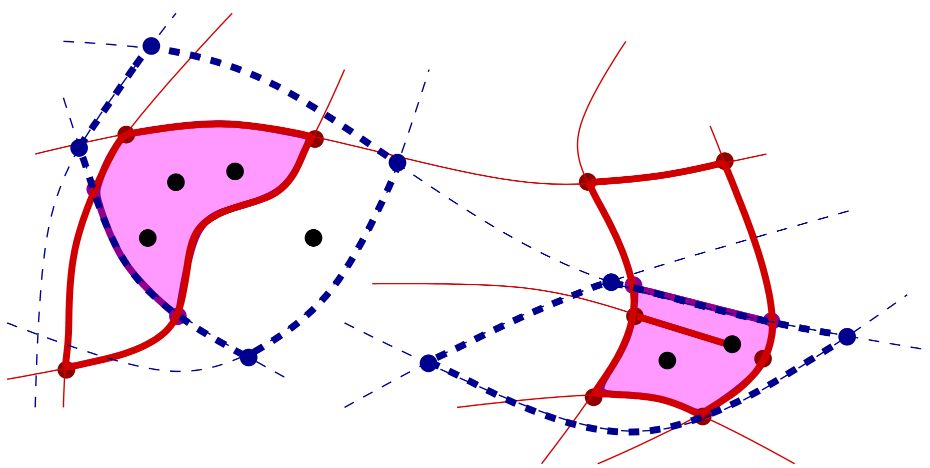
Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.

- Zerlege Menge der Bögen in gleichgroße Teilmengen R und B.
- Berechne rek. im Arrangement $A(R)$ Zelle $Z(R)_x$, die x enthält.
- Berechne rek. im Arrangement $A(B)$ Zelle $Z(B)_x$, die x enthält.
- Berechne Zusammenhangskomponente Z_x von $Z(R)_x \cap Z(B)_x$, die x enthält und berichte diese! RED-BLUE Merge

Zuerst RED-BLUE Merge betrachten, dann zurück!

Allgemeiner RED-BLUE Merge

- Rotes Arrangement R mit Zellen $R_1, \ldots, R_{m_R}$, r Ecken.
- Blaues Arrangement B mit Zellen $B_1, \ldots, B_{m_B}$, b Ecken.
- Punktmenge p_i $i = 1, \ldots, k$
- Schnittzellen $Z_j = R_{\mu_j} \cap B_{\nu_j}$, $j = 1, \ldots, l$, die mind. ein p_i enthalten



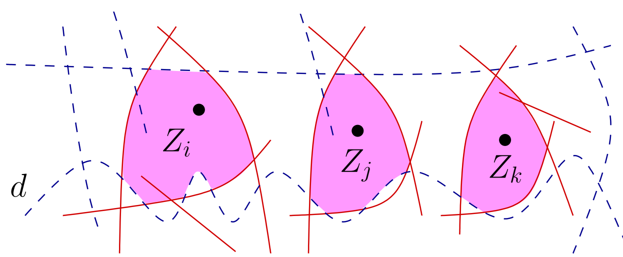
Komplexität der Schnittzellen: Lem. 2.21

Kombinationslemma: Guibas,Sharir,Sifrony 1989 (DSS *Bibel*)

Komplexität der Zellen $Z_1, \ldots, Z_\ell$, $\ell \leq k$:

$$|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_\ell| \in O(r + b + k)$$

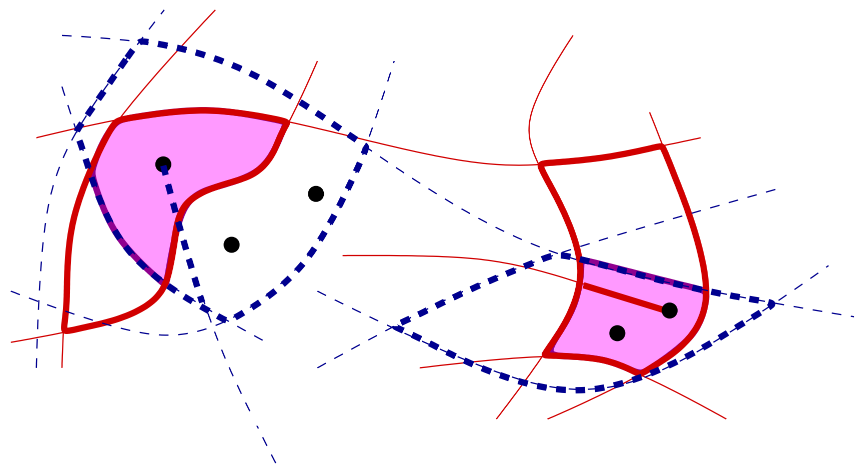
Nicht trivial:



Zur Analyse der Berechnung verwenden!!!

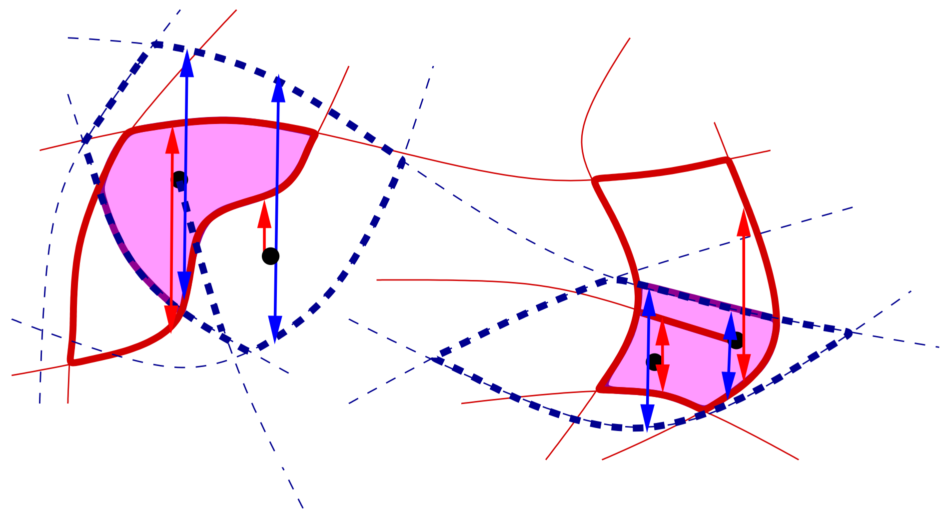
Berechnung: Th. 2.22

- Rotes Arrangement R (r), Blaues Arrangement B (b), Punktmenge P (k), Schnittzellen Z_i
- $|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_\ell|$ in $O((r+b+k)\log(r+b+k))$ berechnen!
- Sweep Algorithmus
- P erweitern: *Innere* Endknoten von R und B: Wichtig!!
- Q: P und *innere* Endknoten



Alg. 2.5: Preprocessing!

Für alle $q \in Q$ darüber/darunter-liegende Kante in R und B



Durch Sweep in jedem Arrangement: Übung

$O((r + b + k) \log(r + b + k))$

Alg. 2.5: Sweep in zwei Richtungen!

i) Teile der Ergebniszellen: Rechts vom am weitesten links liegenden $q \in Q$ beginnen

ii) Teile der Ergebniszellen: Links vom am weitesten rechts liegenden $q \in Q$ beginnen

iii) Nochmals Aufteilen in Teilzellen

Dann Vereinigung!