Offline Bewegungsplanung: Red-Blue Merge

Elmar Langetepe
University of Bonn

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen
- Je zwei schneiden sich s mal
- X-monoton, eventuell erzeugen
- Startpunkt x
- Komplexität der Zelle Z_x: $\lambda_{s+2}(4n)$
- Divide and Conquer Ansatz sinnvoll

Alg. 2.4: Zelle Z_x!

Gegeben: Punkt x, n X-monotone Bögen.

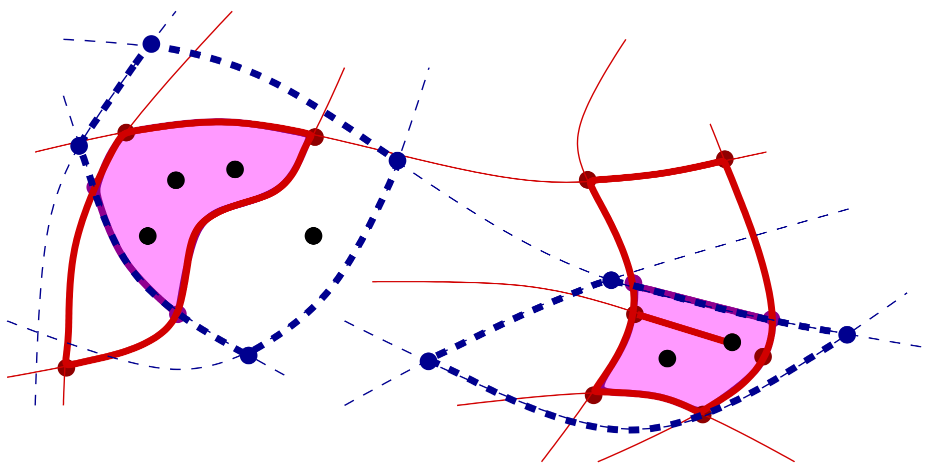
Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.

- Zerlege Menge der Bögen in gleichgroße Teilmengen R und B.
- Berechne rek. im Arrangement $A(R)$ Zelle $Z(R)_x$, die x enthält.
- Berechne rek. im Arrangement $A(B)$ Zelle $Z(B)_x$, die x enthält.
- Berechne Zusammenhangskomponente Z_x von $Z(R)_x \cap Z(B)_x$, die x enthält und berichte diese! RED-BLUE Merge

Zuerst RED-BLUE Merge betrachten, dann zurück!

Allgemeiner RED-BLUE Merge

- Rotes Arrangement R mit Zellen $R_1, \ldots, R_{m_R}$, r Ecken.
- Blaues Arrangement B mit Zellen $B_1, \ldots, B_{m_B}$, b Ecken.
- Punktmenge p_i $i = 1, \ldots, k$
- Schnittzellen $Z_j = R_{\mu_j} \cap B_{\nu_j}$, $j = 1, \ldots, l$, die mind. ein p_i enthalten



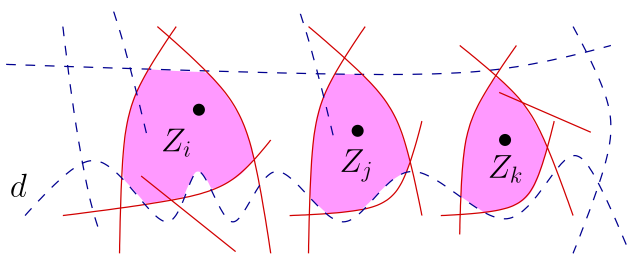
Komplexität der Schnittzellen: Lem. 2.21

Kombinationslemma: Guibas,Sharir,Sifrony 1989 (DSS *Bibel*)

Komplexität der Zellen $Z_1, \ldots, Z_\ell$, $\ell \leq k$:

$$|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_\ell| \in O(r + b + k)$$

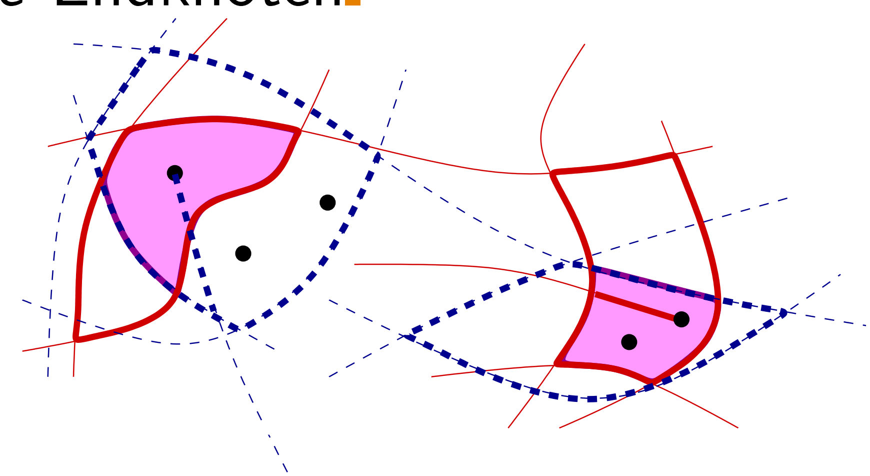
Nicht trivial:



Zur Analyse der Berechnung verwenden!!!

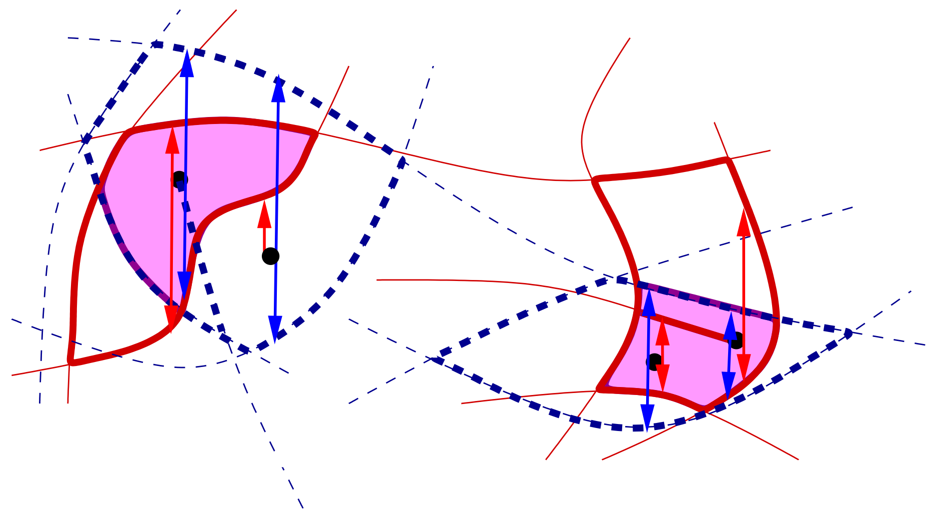
Berechnung: Th. 2.22

- Rotes Arrangement R (r), Blaues Arrangement B (b), Punktmenge P (k), Schnittzellen Z_i
- $|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_\ell|$ in $O((r+b+k)\log(r+b+k))$ berechnen!
- Sweep Algorithmus
- P erweitern: *Innere* Endknoten von R und B: Wichtig!!
- Q: P und *innere* Endknoten



Alg. 2.5: Preprocessing!

Für alle $q \in Q$ darüber/darunter-liegende Kante in R und B



Durch Sweep in jedem Arrangement: Übung

$O((r+b+k)\log(r+b+k))$

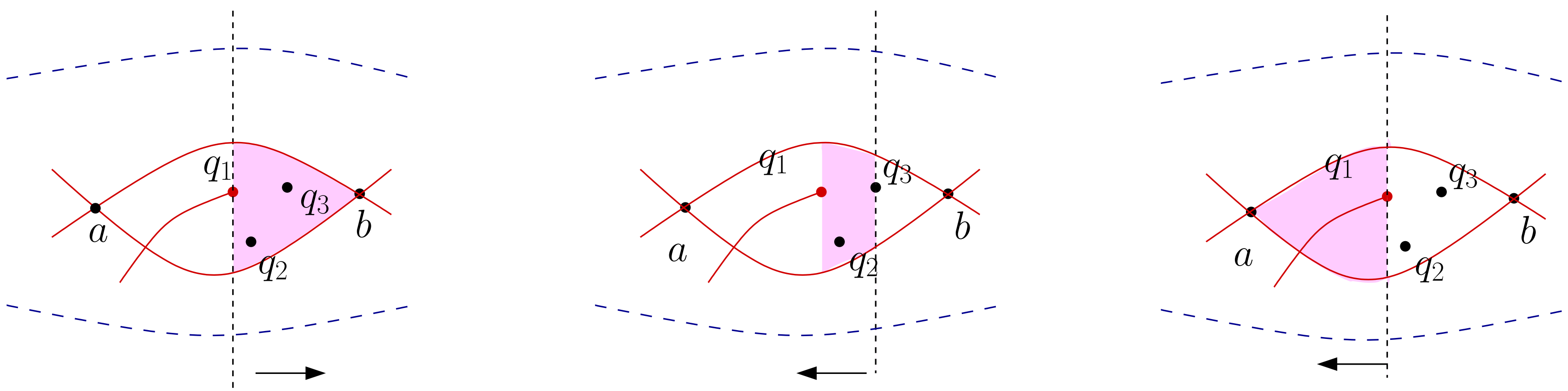
Alg. 2.5: Sweep in zwei Richtungen!

i) Teile der Ergebniszellen: Rechts vom am weitesten links liegenden $q \in Q$ beginnen

ii) Teile der Ergebniszellen: Links vom am weitesten rechts liegenden $q \in Q$ beginnen

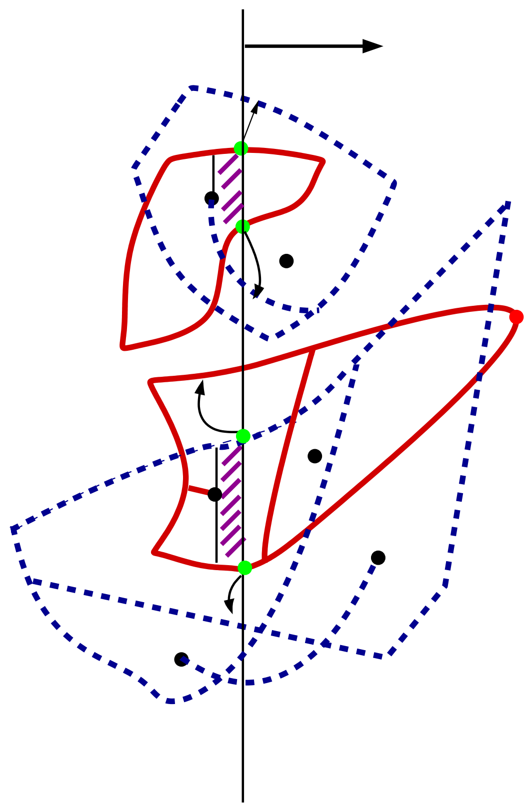
iii) Nochmals Aufteilen in Teilzellen

Dann Vereinigung!



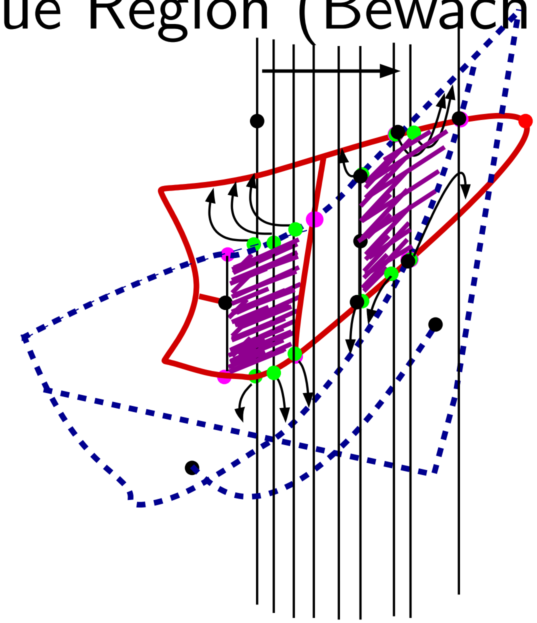
Alg. 2.6: Sweep (eine Richtung!)

- ES: nach X-Koord. sort.
  Punkte aus Q + zusätzl. Ecken
  von R und B.
- SSS: Zu jedem Zeitpunkt:
  - sortierte Folge der Schnittzellen entlang der Sweepline
  - Schnittzellen haben Zeiger auf O/U Kanten
  - Scout läuft auf Schnittkante und bewacht mitentscheidene Kanten!!



Alg. 2.6: Ereignisse!!

- Bewachte Kante wechselt! (Schnitte: Mit Bewacher?)
- Randkante wechselt! (Schnitte: Mit Bewacher/Mit Randkante?)
- Red/Blue Schnittpunkt: Region Ende oder Wechsel Rand/Bewachte Kante
- Endpunkt aus Q: Neue Region (Bewachung/Schnitte)!!



Beispiel (Tafel): Alg. 2.6: Ereignisse!!

$n = r + b + k$

1. Rot/Roter Schnittpunkt: Wechsel! Schnitte! $O(1)$
2. Blau/Blauer Schnittpunkt: Wechsel! Schnitte! $O(1)$
3. Rot/Blauer Schnittpunkt: Wechsel! Schnitte! $O(1)$
4. Neuer Punkt: Regionstart $O(1)$ Preprocessing! Einfügen in SSS: $O(\log n)$; Schnitte! $O(1)$

- Schnitte Blau/Rot berechnen: 1), 2), 3), 4)!
  - A) Nächsten berechnet in $O(1)$
  - B) Einfügen in ES: $O(\log n)$: Begründung!

Analyse: Red-Blue Merge Th. 2.22

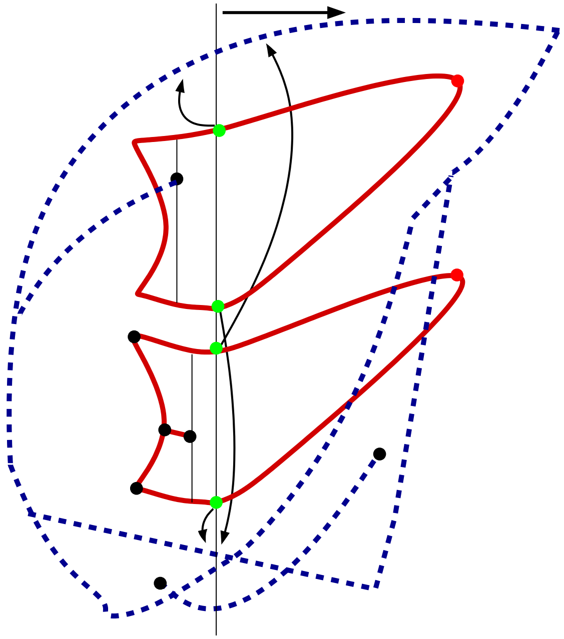
$n = r + b + k$

- Nie mehr als $O(r+b+k)$ Punkte in ES
- Nie mehr als $O(r+b+k)$ Regionen in SSS
- Einfügen in ES: $O(\log(r+b+k))$
- Einfügen in SSS: $O(\log(r+b+k))$
- Nicht mehr als $O(r+b+k)$ Ereignisse:
  - Rot/Rot, Blau/Blau: r und b
  - Rot/Blau, neu aber in $O(r+b+k)$
  - Neue Punkte: max. $k+r+b$

Insgesamt: $O(n \log n)$

Analyse: Red-Blue Merge Th. 2.22

- Problem (Besonderheiten):
- Eine bewachte Kante gehört zu vielen Zellen!
- Nicht für alle Zellen prüfen!!
- Abhilfe: In Listen zusammenfassen!
- Nur mit oberen/unteren den Schnitt testen!



Initialisierung Red-Blue Merge Th. 2.22

- Weitere Besonderheiten
- Initialisierung
- Zu Beginn nur zwei einzelne Bögen
- Natürliche Begrenzung (häufig)
- Unendliche Zellen
- Beispiel: Tafel!

Zellenberechnung: Th. 2.23

n X-monotone Kurvenstücke von denen sich zwei nur s mal schneiden, x gegeben. Zelle Z_x kann in Zeit $O(\lambda_{s+2}(n)) \log^2 n)$ berechnet werden.

Fahrplan!!

- Divide and Conquer!!
- Teile Segmente in zwei gleichgroße Mengen Z_1, Z_2
- Berechne Z_{1x} und Z_{2x}
- Merge zu $\{Z_1 \cup Z_2\}_x$
- Spezieller Merge wegen Schnitt mit x
- RED BLUE Merge
- Merge: Komplexität des Ergebnisses

Beweis: Th. 2.22

Divide and Conquer

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.) } + C \times \lambda_{s+2}(n)\log(\lambda_{s+2}(n)) \text{ (R/B-Merge)}\\
&\leq 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + C\lambda_{s+2}\left(\frac{n}{2}\right)\log\frac{n}{2}\right) + C \times \lambda_{s+2}(n)\log n\\
&\vdots \quad \vdots\\
&\leq (n)\,(T(1)+C) + C\sum_{i=0}^{\log n}\left(\lambda_{s+2}(n)\log\frac{n}{2^i}\right)\\
&\in O(\lambda_{s+2}(n)\log^2 n)
\end{aligned}
$$

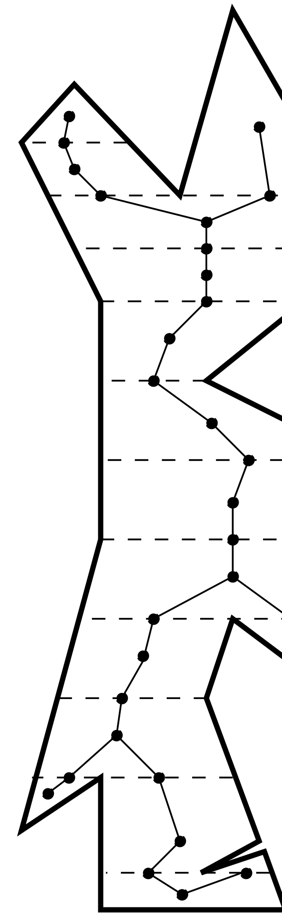
Anwendungen: Kap. 2.2.2

- Polygonaler Roboter R mit $|R| = m$
- Polygonale Szene n Ecken
- Reine Translationsbewegung
- Startposition s, Endposition t
- Kollisionsfreie Bahn von s nach t

Alg. 2.7

Preprocessing:

- Arrang. $2mn$ Linienseg.(Ecke/Kante)
- Ber. Zelle Z, die s enthält:
  Komplexität $O(\lambda_{(1+2)}(mn))$,
  Laufzeit $O(\lambda_{(1+2)}(mn)\log^2(mn))$
- Trapezzerlegung,
  Zusammenhangsgraph: Seidel
  $O(\lambda_{(1+2)}(mn)\log^*(mn))$ (Sweep)



Query: gegebenes t:

- Trapez, das t enthält: $O(\log(mn))$
- Pfad s nach t im Zusammenhangsgraph:
  $O(\lambda_{(1+2)}(mn))$

Theorem 2.24

Translation von R polygonaler Roboter mit m Ecken, in einer Umgebung mit polygonalen Hindernissen P_i mit insgesamt n Ecken.

Gegeben seien Start– und Zielposition s, t.

Dann kann in Zeit $O(mn\,\alpha(mn)\log^2(mn))$ eine kollisionsfreie Translation von s nach t bestimmt werden oder festgestellt werden, dass keine solche existiert.