

# Offline Bewegungsplanung: Zellenberechnungen

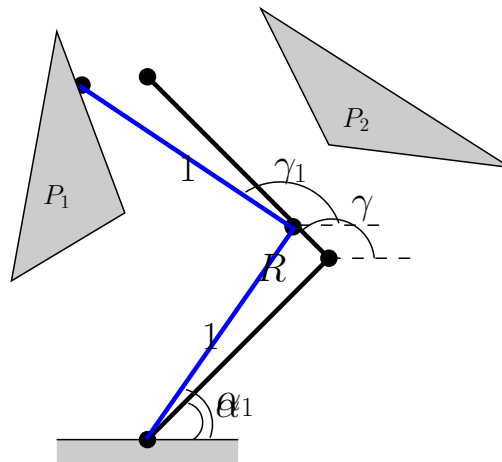
Elmar Langetepe  
University of Bonn

## Zellenberechnung: Th. 2.23

$n$   $X$ -monotone Kurvenstücke von denen sich zwei nur  $s$  mal schneiden,  $x$  gegeben. Die Zelle  $Z_x$  kann in Zeit  $O(\lambda_{s+2}(n)) \log^2 n$  berechnet werden.■

## Anwendungen: Kap. 2.2.3

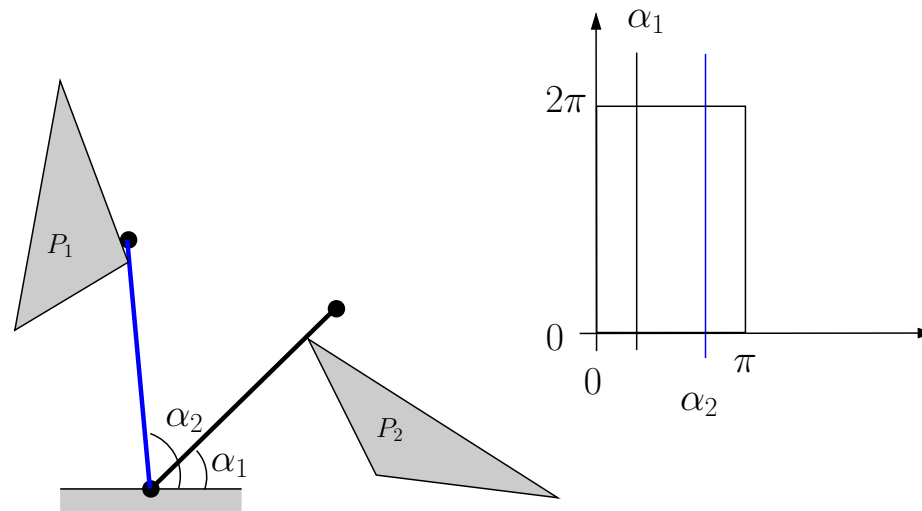
- Allgemeinheit der Konstruktion ausnutzen
- $n$  Bögen begrenzen Konfigurationsraum
- Beispiel: Podest, Roboterarm mit zwei Gelenken
- Zwei Freiheitsgrad: Tupel des Konfigurationsraumes!!
- Hindernisse, normierte Armlänge



# Wodurch wird eine Zelle begrenzt? 1.

Einschränkung unterer Bogen:  $\alpha_1, \alpha_2$

Zwei Kanten im Konfigurationsraum!!

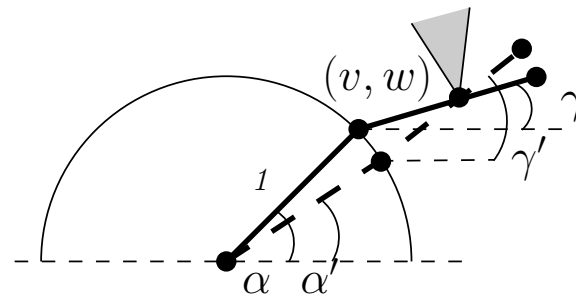


## Wodurch wird eine Zelle begrenzt? 2.

Kontakt: Hindernisecke mit oberem Arm! Entlangsschieben! ■

■ Kurve im Konfigurationsraum!! ■

Geschickte Parametrisierung wählen! (Tafel) ■

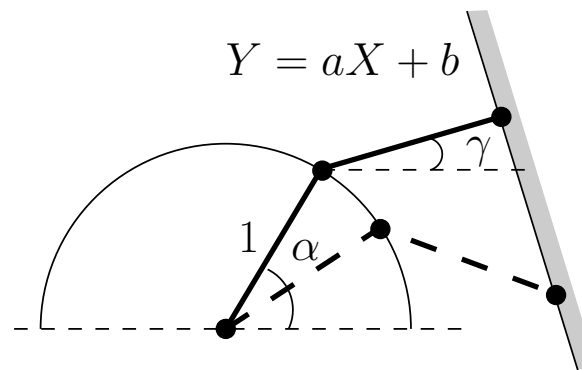


# Wodurch wird eine Zelle begrenzt? 3.

Kontakt: Roboterecke mit Hinderniskante! Entlangsschieben! ■

■ Kurve im Konfigurationsraum!! ■

Geschickte Parametrisierung wählen! (Tafel) ■



# Algebraische Kurven!

1. 2 Geraden  $x = \cos(\alpha_i) \quad i = 1, 2$  ■
2.  $n$  Kurven:  $(v, w)$  fest!  $\{(x, y) | (2wy^2)^2(1 - x^2) = (v^2 - 2xv + x^2 - y^2v^2 + 2xvy^2 - w^2y^2 - y^2)^2\}$  ■
3.  $n$  Kurven:  $(a, b)$  fest!  
 $\{(x, y) | ((a(x + y) + b)^2 - 2 + x^2 + y^2)^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)\}$  ■

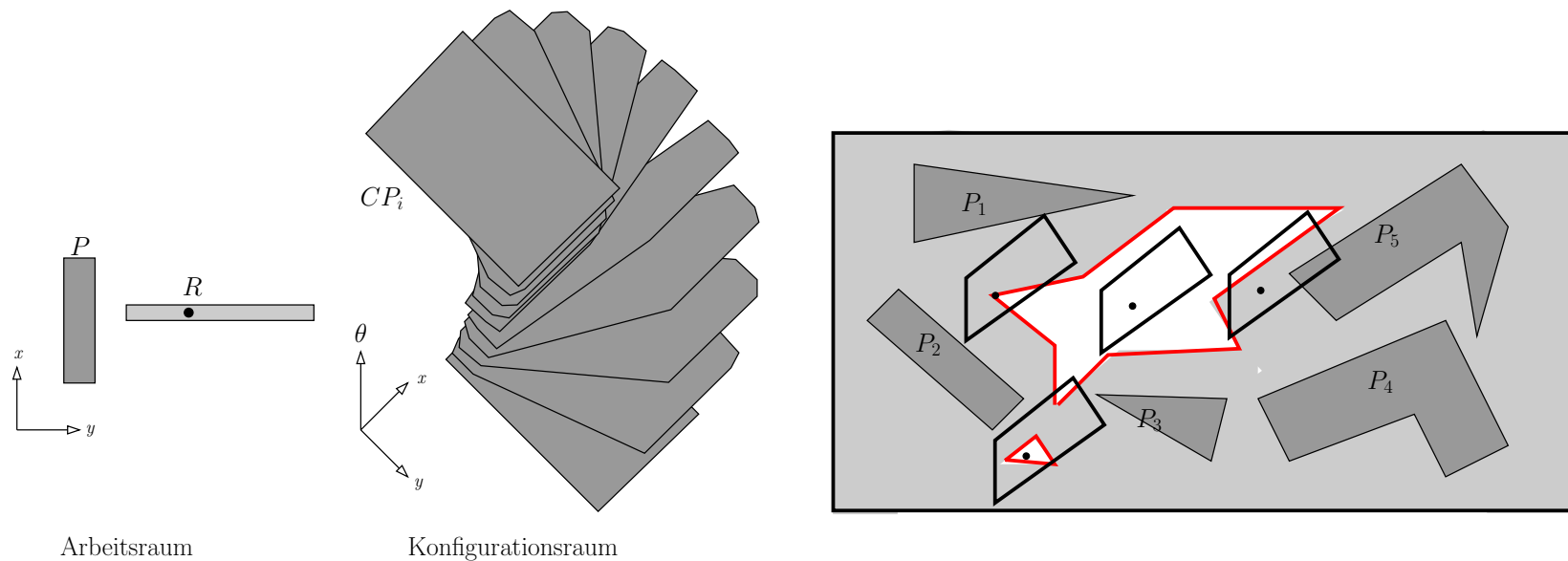
Multivariate Polynome vom Grad  $\leq 6$ !

Theorie: ■ Je zwei maximal  $6^2$  Schnitte! ■ Numerisch berechnen! ■

**Th. 2.22** anwenden: Bahnplanung in  $O(\lambda_{(36+2)}(n) \log^2 n)$ !! ■

# Bahnplanungsprobleme

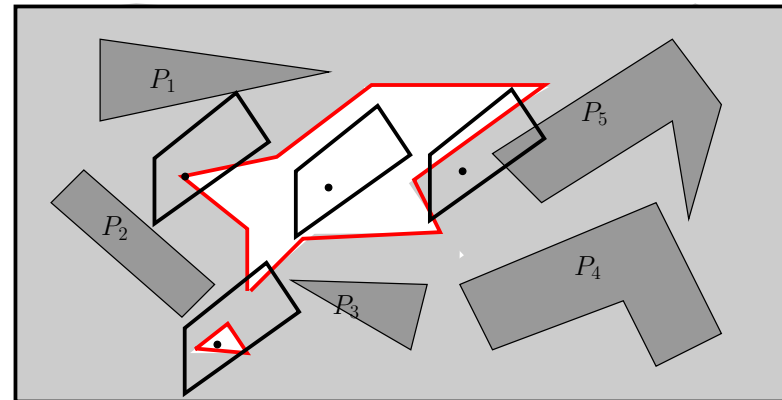
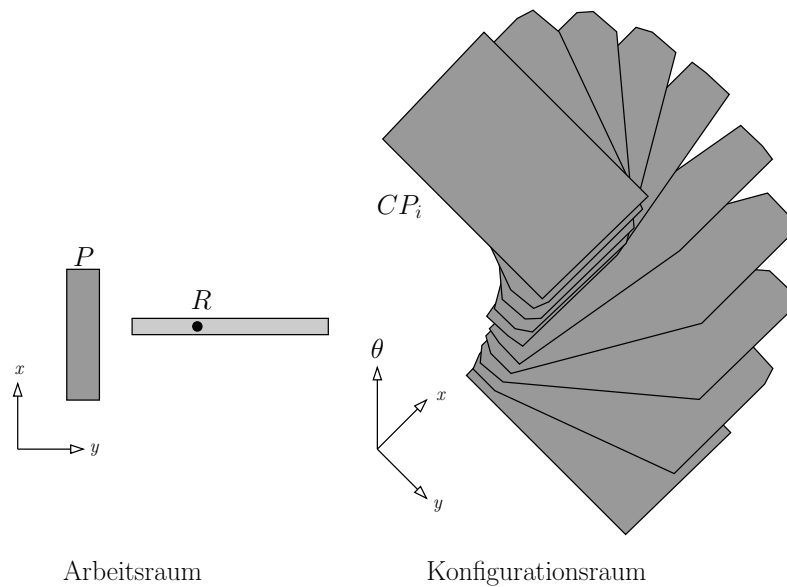
- Bislang Konfigurationsraum berechnen,  $C_{\text{frei}}$
- ● Beispiel: Translation bel. Roboter
- Beispiel: Rotation/Translation konvexer Roboter





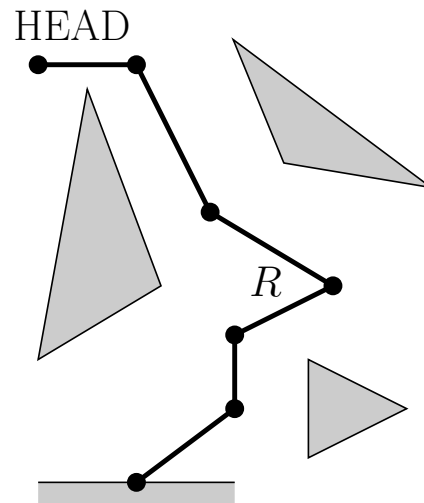
# Bahnplanungsprobleme

- Laufzeiten für Konstruktion/Bahnplanung
- Allgemein: Laufzeit NP-schwer
- Entscheidbarkeit? Lösung berechenbar?



# Allgemeine Bahnplanungsprobleme: Laufzeit!!

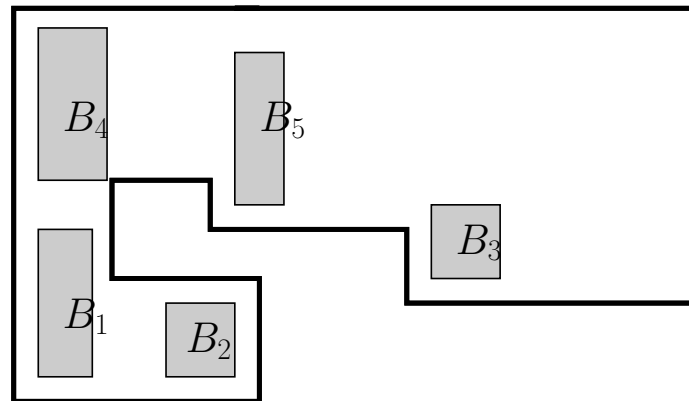
- Krahnbewegung in polygonaler Szene
- ●  $m$  Gelenke und Kanten
- Ex. kollisionsfreie Bewegung des Kopfes?
- Von Start- zu Zielkonfiguration
- Entscheidungsproblem lösen!





# Verschieben von Boxen ist NP-hard

**Theorem 3.1:** Roboter  $R$  sei gegeben durch eine Menge von  $m$  unterschiedlich großen, achsenparallelen Rechtecken  $R_i$ , die nicht miteinander verbunden sind. Die Umgebung sei ein einfaches Polygon  $P$  mit achsenparallelen Kanten. Start- und Zielposition  $s$  und  $t$  seien halbfreie Positionen der  $R_i$  in  $P$ . Zu entscheiden, ob es in diesem Modell eine kollisionsfreie Bewegung von  $s$  nach  $t$  gibt, ist NP-schwer.

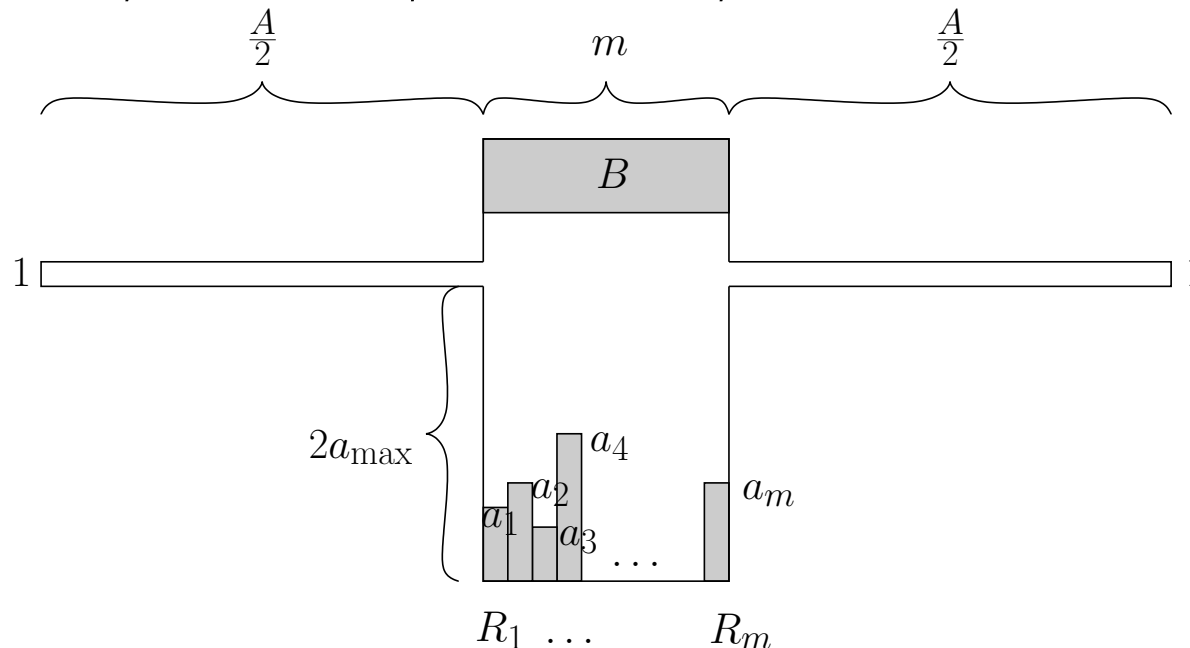


# Reduktion von Partition!

- Gegeben ist Menge  $X = \{a_1, \dots, a_m\} \subset N$  ■
- Existiert Teilmenge  $Y \subset X$  mit  $\sum_{a_i \in Y} a_i = \sum_{a_j \in X \setminus Y} a_j$  ■
- Partition ist NP-vollständig, Garey/Johnson 79 ■
- Liegt in NP, ist NP-schwer ■
- Übersetze Partition in Box-Planungsproblem ■

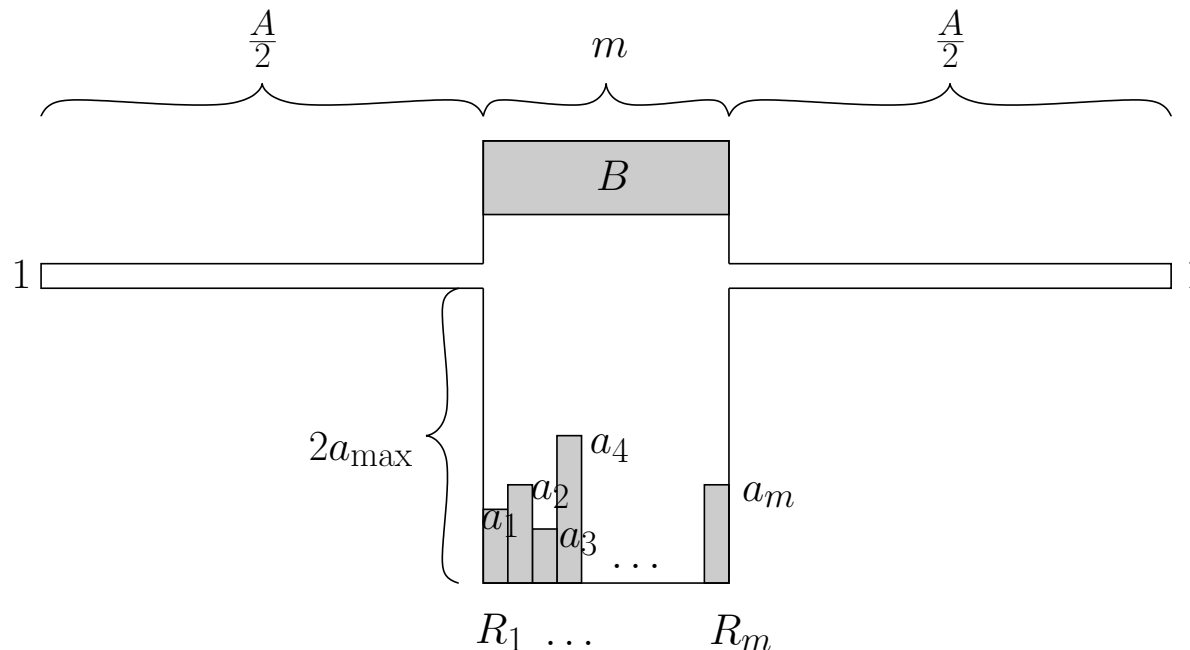
# Konstruktion einer Szene

- $X = \{a_1, \dots, a_m\} \subset N$ , sei  $A := \sum_{i=1}^m a_i$  und  $a_{\max} := \max_{1 \leq i \leq m} a_i$ .
- Halle: Breite  $m$ , Arme: Breite  $\frac{A}{2}$ , Höhe 1, ab  $2a_{\max}$
- Für  $a_i$  Rechteck  $R_i$ : Höhe  $a_i$ , Breite 1, Hallenboden
- $R$ :  $R_i$ , plus  $B$ , Breite  $m$ , Höhe  $> 1$ , oben



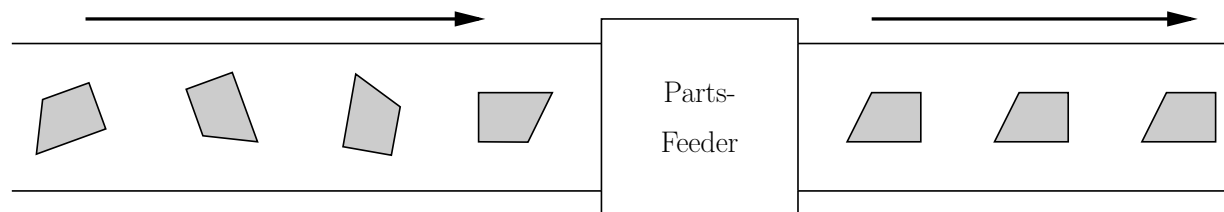
# Konstruktion einer Szene

- Zielkonfiguration:  $B$  soll unten sein, die  $R_i$ s oben
- Offensichtlich: Nur durch verschieben der  $R_i$  in die Arme
- So, dass auf beiden Seiten  $A/2$
- Partition von  $X = \{a_1, \dots, a_m\} \subset N$



# Orientierung polygonaler Werkstücke

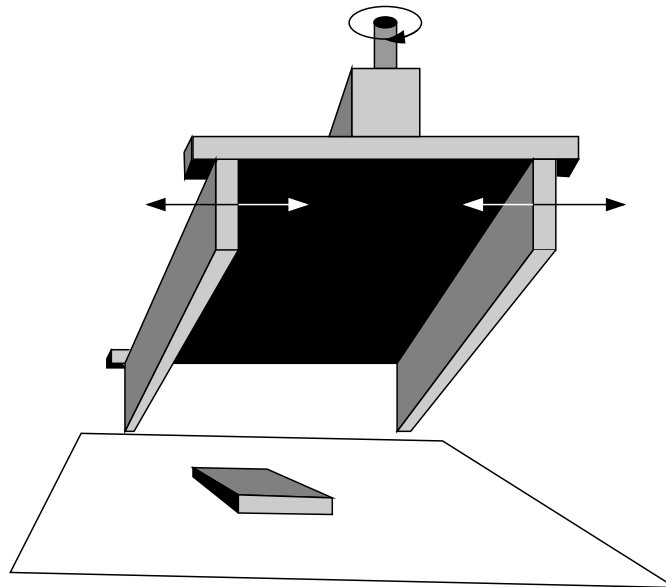
- Rohlinge zur Verarbeitung in die richtige Lage bringen
- Bearbeitung der Werkstücke
- Part-Feeder: Black Box
- Häufig direkt auf Rohlinge abgestimmt: Hardware-Wechsel
- Geometrie ausnutzen, rekonfigurierbar, ohne Sensorik
- Software





# Hardware: Parallel Jaw-Gripper

- Drehen des Greifers■
- Schließen der Backen■
- Öffnen der Backen■
- Aktion: Verursacht Drehung des Objektes■
- Plan von Aktionen berechnen■

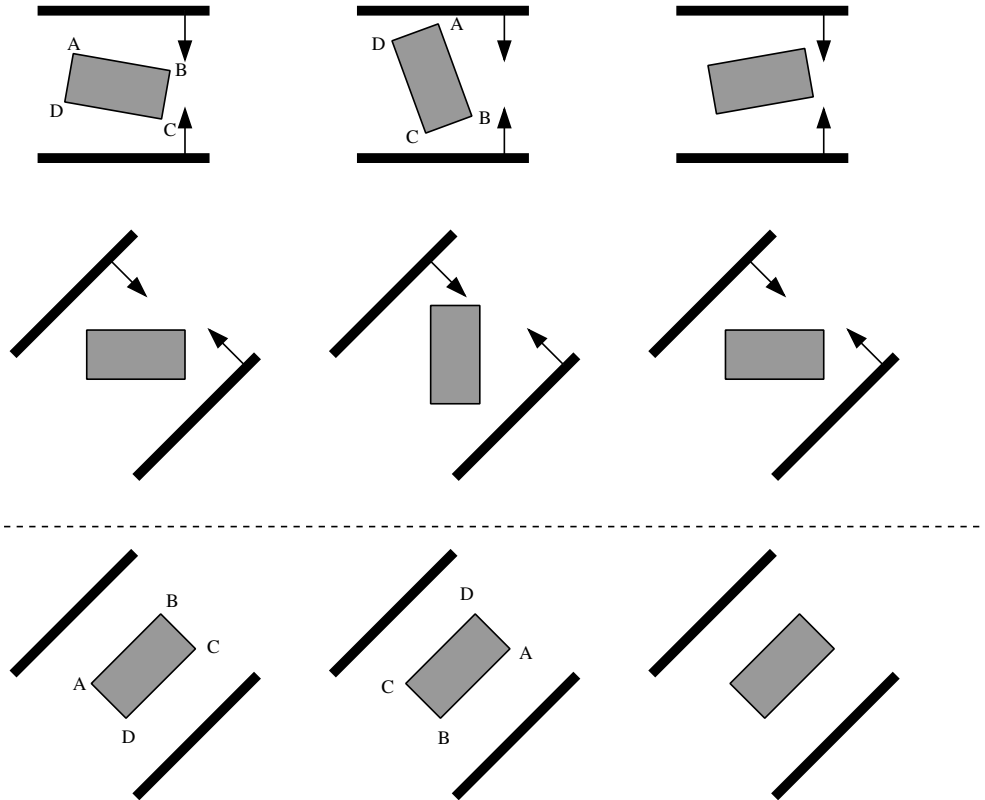


# Geometrisches Modell

- Input: Polygonales Werkstück, Konvexe Hülle davon
- Output: *Squeeze-Plan*: Folge von Drehen-Greifen
- Winkel:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
- Bis auf Symmetrie in eindeutige Lage bringen
- Plan exakt berechnen aus der Geometrie
- Andere Ansätze: Simulation, Heuristiken, Genetische Alg.

# Beispiel!

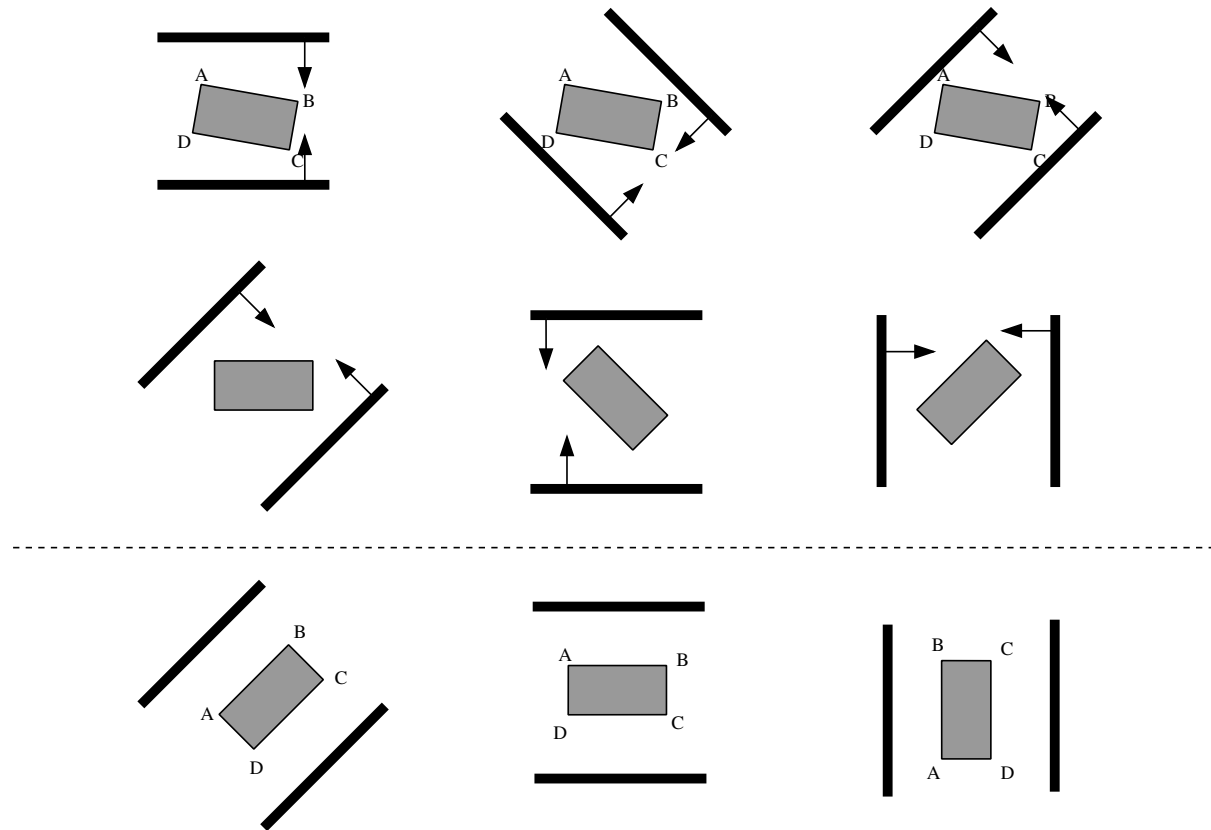
- Plan  $(0, \frac{\pi}{4})$
- Bringt Werkstück in gleiche Endlage
- Unabhängig von Ausgangslage
- Bis auf Symmetrie!
- Jede Endlage möglich



# Verschiedenen Endlagen!



- Plan  $(0, \frac{\pi}{4})$
- Plan  $(-\frac{\pi}{4}, 0)$
- Plan  $(+\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

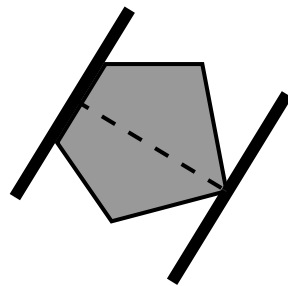


# Nützliche Annahmen

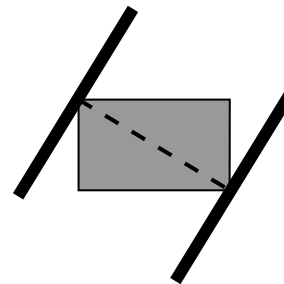
1. Greifer: Parallele Backen■
2. Drehrichtung: Orthogonal zu Backen■
3. Werkstück: Festes planares konvexes Polygon■
4. Isoliert zwischen den Backen■
5. Zunächst: Backen treffen gleichzeitig auf!(Später aufheben!)■
6. Kontakt bleibt erhalten, kein Wegrutschen!■
7. Keine Reibung! Kein Einklemmen!(Später aufheben!)■

# Einklemmen!

- Stabile Lage: **Stabiles Gleichgewicht**■
- **Instabiles Gleichgewicht**■
- Kommt praktisch nicht vor■
- Abhilfe: Fehlertoleranz bei der Bewegung!■



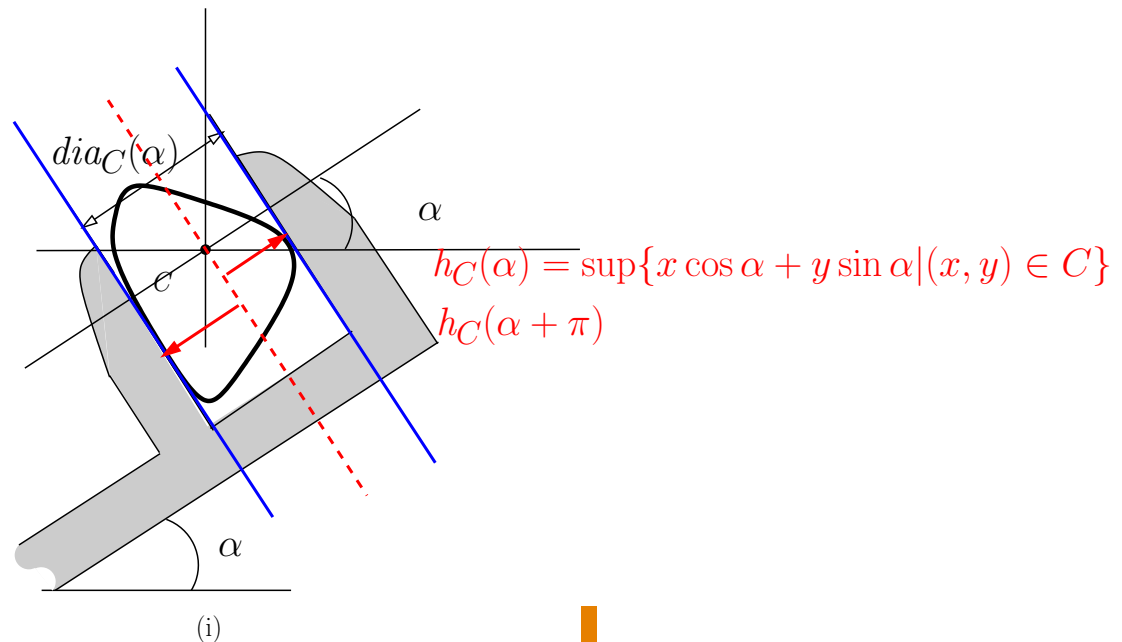
Stabil!



Instabil!

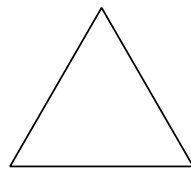
# Funktionen: Definition 4.1 (i)!

- Werkstück liegt fest
- Diameter:  $\text{dia} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$
- Rotation der Backen um Winkel
- Schließen und Abstand
- Symmetrisch ab  $\pi$



# Funktionen: Definition 4.1 (i)!

- Stabiles Gleichgewicht in lokalen Minima
- Rotationssymmetrie der konvexen Hülle: Beispiele
- $r$ -fache Rotationssymmetrie
- Weitere Symmetrie in der Diameter Funktion
- Periode  $T$



dreifache

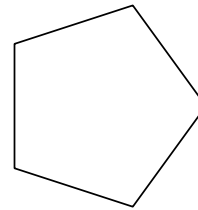
$$T = \frac{\pi}{3}$$



vierfache

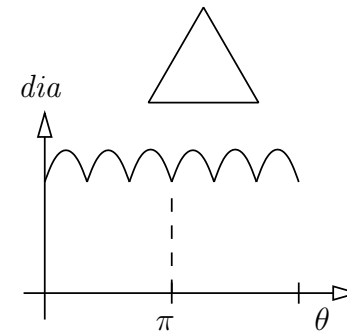
Rotationssymmetrie

$$T = \frac{\pi}{2}$$



fünffache

$$T = \frac{\pi}{5}$$

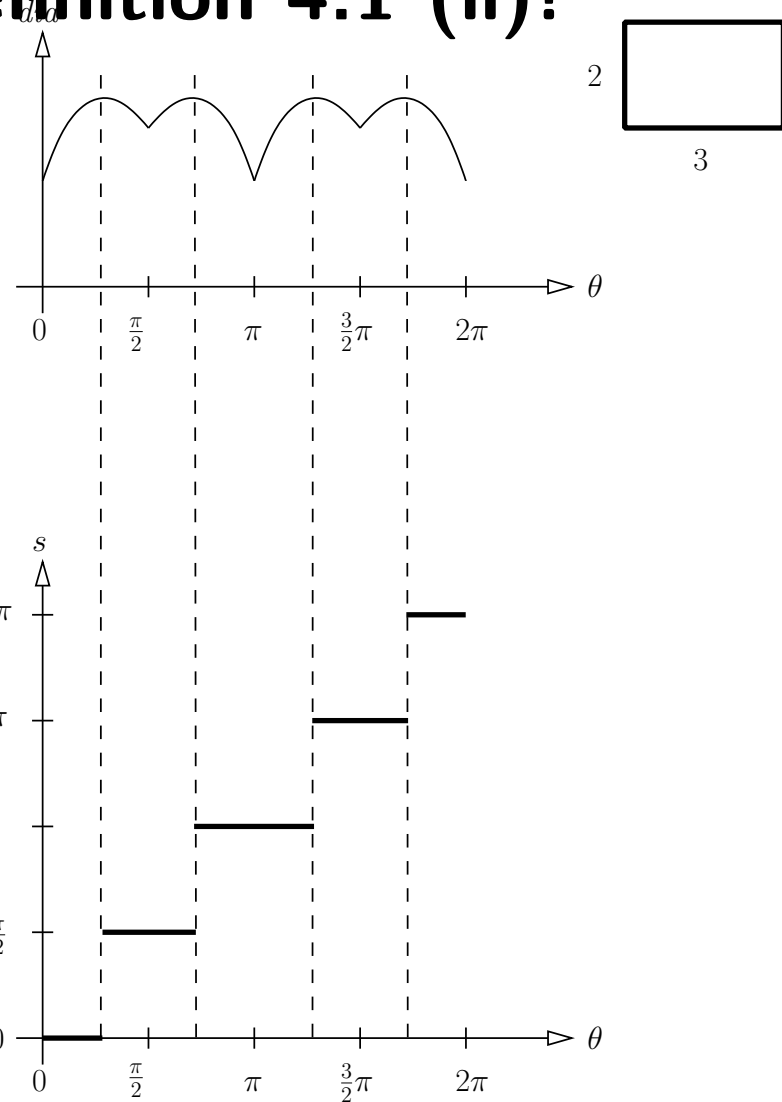
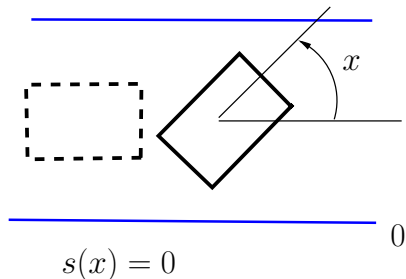


$$r = 3$$



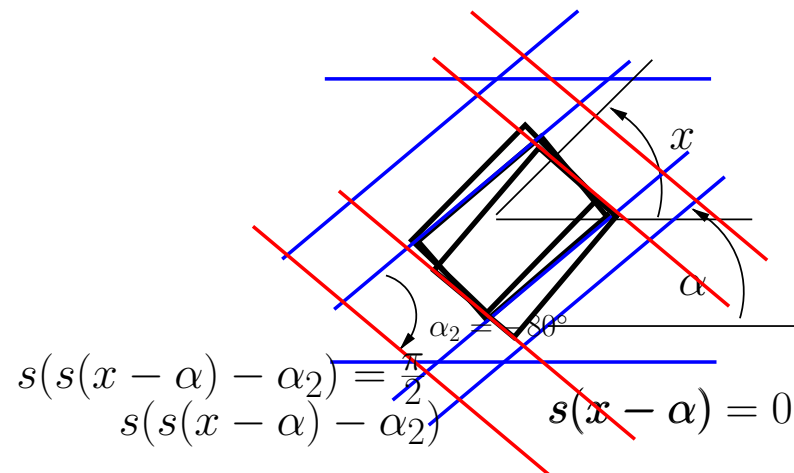
# Funktionen: Definition 4.1 (ii)!

- Greiffunktion:  
 $s : [0, 2\pi) \longrightarrow [0, 2\pi)$  ■
- $x$  Orient. bezüglich Greifer ■
- $s(x)$  Orient. nach dem Greifen ■
- Treppenfunktion:  
 Zwischen Maxima auf Minima ■



# Funktionen: Definition 4.1 (iii)!

- Sequenz von Greifoperationen
- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$
- $S(\mathcal{A}, \theta) := s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k)$
- Beispiel:  $y := s(x - \alpha), s(y - \alpha_2)$  bezüglich Greifer!!



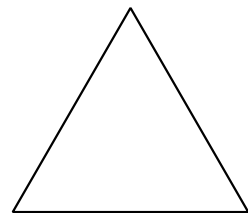
# Periodizität Greiffunktion: Lemma 4.3!

i) Für Polygone mit  $r$ -facher Rotationssymmetrie ist die

■ Greiffunktion  $T$ -periodisch mit  $T = \frac{2\pi}{r(1+(r \bmod 2))}$ .

ii) Für eine  $T$ -periodische Greiffunktion  $s$  gilt:

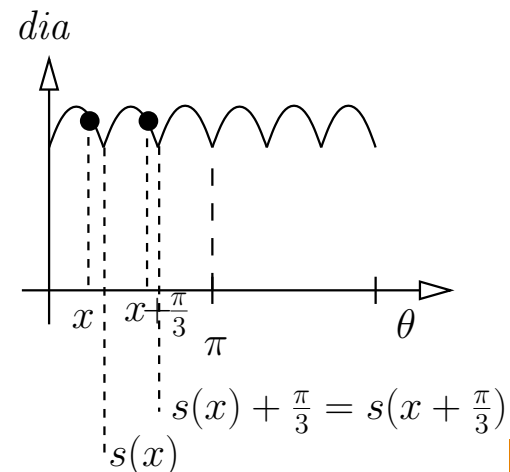
$$S(\mathcal{A}, \theta + T) = S(\mathcal{A}, \theta) + T.$$



dreifache

$$T = \frac{\pi}{3}$$

$$r = 3$$



## Periodizität Greiffunktion: Lemma 4.3 (ii)

Für  $T$ -periodische Greiffunktion  $s$  gilt:  $S(\mathcal{A}, \theta + T) = S(\mathcal{A}, \theta) + T$ .

- $s(x + T) = s(x) + T$  nach Def. Periode
- $\theta$  Startposition bezügl. Greifer,  $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$
- $S(\mathcal{A}, \theta) := s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k)$
- $S(\mathcal{A}, \theta + T) = s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1 + T) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k)$
- $\beta_1 := s((\theta - \alpha_1) + T) = s(\theta - \alpha_1) + T$
- $\beta_2 := s(\beta_1 - \alpha_2) = s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2 + T) = s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) + T$
- Induktiv:  $\beta_i = s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_i) + T$
- $\beta_{i+1} = s(s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{i-1}) - \alpha_i) - \alpha_{i+1} + T) = s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{i-1}) - \alpha_i) - \alpha_{i+1} + T$
- $S(\mathcal{A}, \theta + T) = S(\mathcal{A}, \theta) + T!$