

Offline Bewegungsplanung: Part Feeding

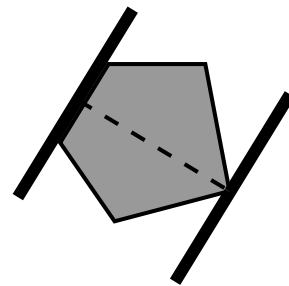
Elmar Langetepe
University of Bonn

Nützliche Annahmen

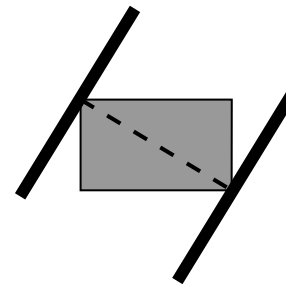
1. Greifer: Parallele Backen■
2. Drehrichtung: Orthogonal zu Backen■
3. Werkstück: Festes planares konvexes Polygon■
4. Isoliert zwischen den Backen■
5. Zunächst: Backen treffen gleichzeitig auf!(Später aufheben!)■
6. Kontakt bleibt erhalten, kein Wegrutschen!■
7. Keine Reibung! Kein Einklemmen!(Später aufheben!)■

Einklemmen!

- Stabile Lage: **Stabiles Gleichgewicht**■
- **Instabiles Gleichgewicht**■
- Kommt praktisch nicht vor■
- Abhilfe: Fehlertoleranz bei der Bewegung!■



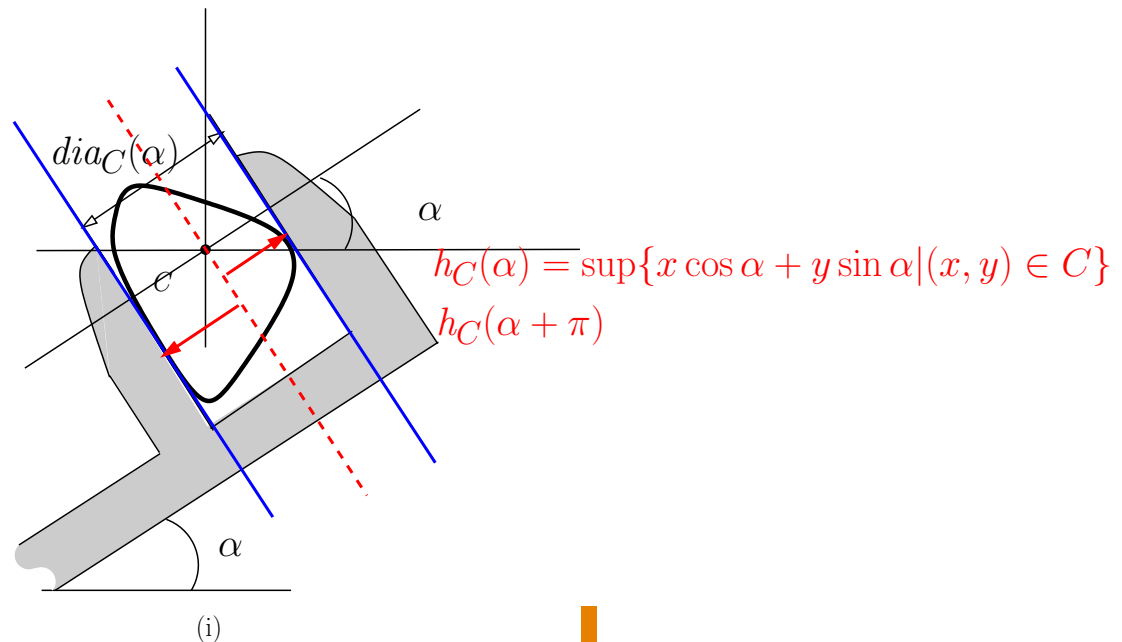
Stabil!



Instabil!

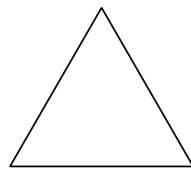
Funktionen: Definition 4.1 (i)!

- Werkstück liegt fest
- Diameter: $\text{dia} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$
- Rotation der Backen um Winkel
- Schließen und Abstand
- Symmetrisch ab π



Funktionen: Definition 4.1 (i)!

- Stabiles Gleichgewicht in lokalen Minima
- Rotationssymmetrie der konvexen Hülle: Beispiele
- r -fache Rotationssymmetrie
- Weitere Symmetrie in der Diameter Funktion
- Periode T



dreifache

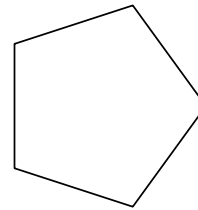
$$T = \frac{\pi}{3}$$



vierfache

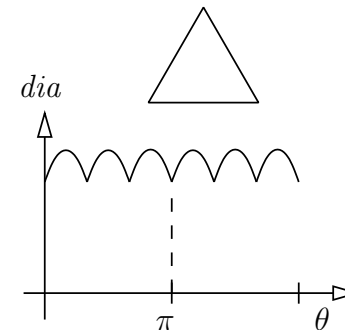
Rotationssymmetrie

$$T = \frac{\pi}{2}$$



fünffache

$$T = \frac{\pi}{5}$$



$$r = 3$$

Funktionen: Definition 4.1 (ii)!

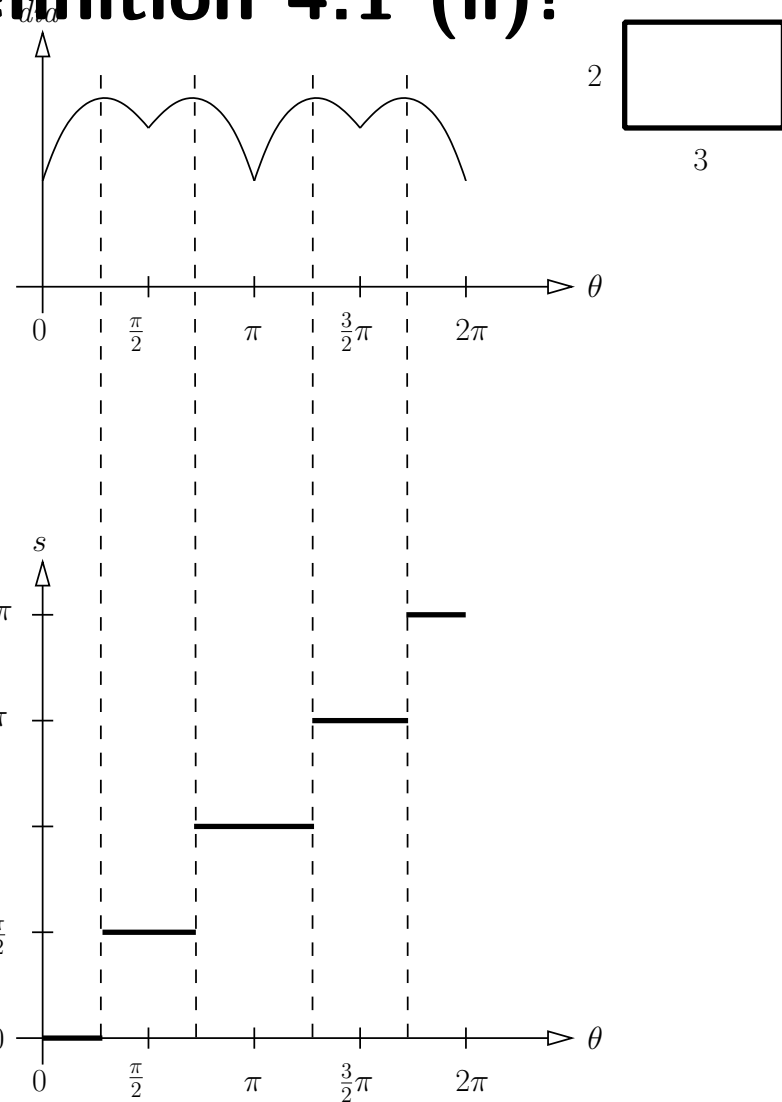
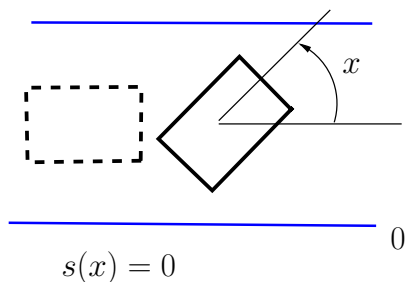
- Greiffunktion:

$$s : [0, 2\pi) \longrightarrow [0, 2\pi)$$

- x Orient. bezüglich Greifer

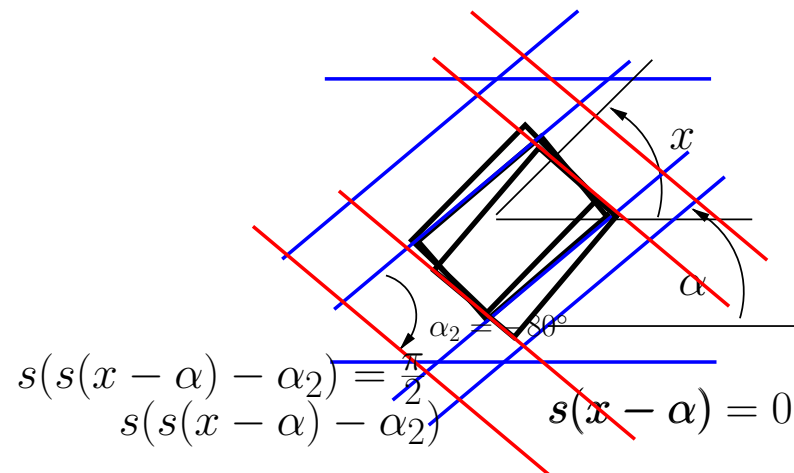
- $s(x)$ Orient. nach dem Greifen

- Treppenfunktion: Zwischen Maxima auf Minima



Funktionen: Definition 4.1 (iii)!

- Sequenz von Greifoperationen
- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$
- $S(\mathcal{A}, \theta) := s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k)$
- Beispiel: $y := s(x - \alpha), s(y - \alpha_2)$ bezüglich Greifer!!



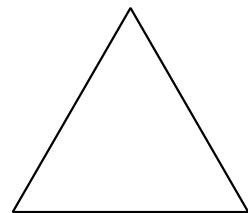
Periodizität Greiffunktion: Lemma 4.3!

i) Für Polygone mit r -facher Rotationssymmetrie ist die

■ Greiffunktion T -periodisch mit $T = \frac{2\pi}{r(1+(r \bmod 2))}$.

ii) Für eine T -periodische Greiffunktion s gilt:

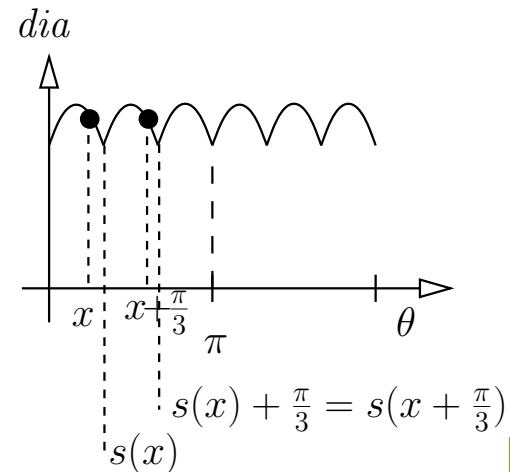
$$S(\mathcal{A}, \theta + T) = S(\mathcal{A}, \theta) + T.$$



dreifache

$$T = \frac{\pi}{3}$$

$$r = 3$$



Periodizität Greiffunktion: Lemma 4.3 (ii)

Für T -periodische Greiffunktion s gilt: $S(\mathcal{A}, \theta + T) = S(\mathcal{A}, \theta) + T$.

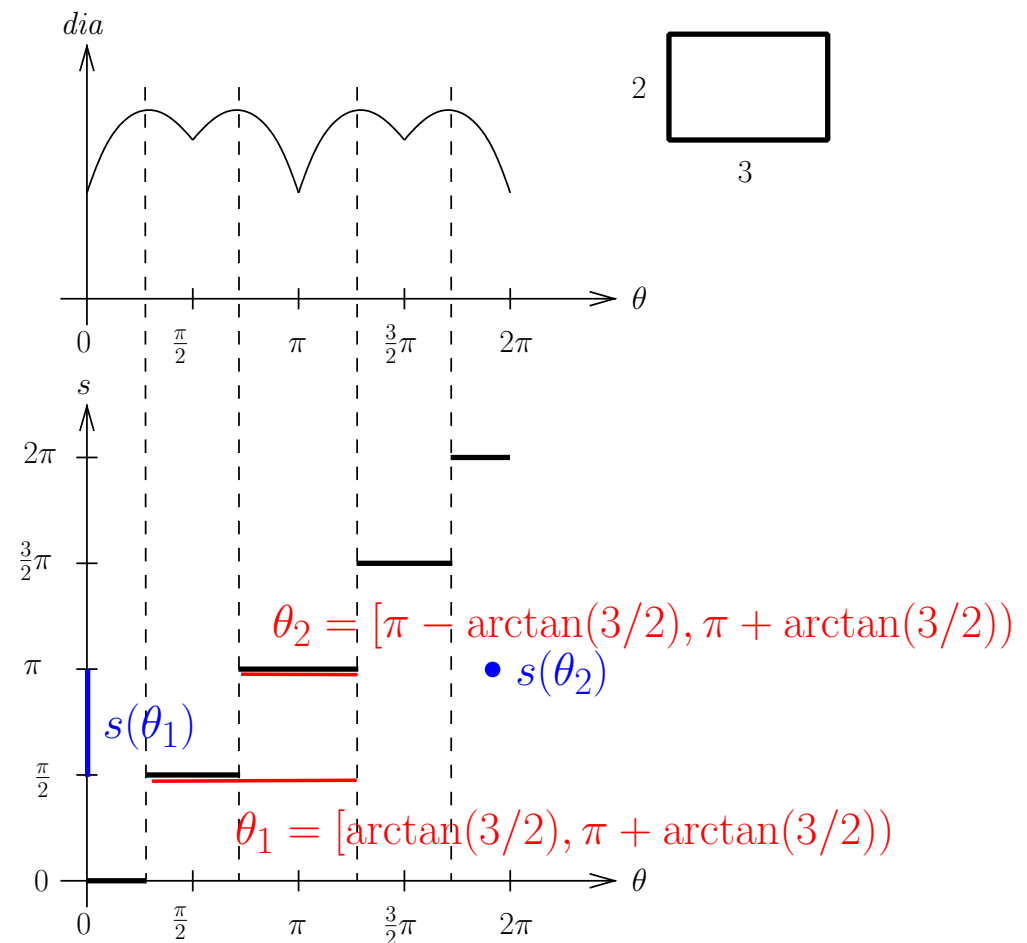
- $s(x + T) = s(x) + T$ nach Def. Periode
- θ Startposition bezügl. Greifer, $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$
- $S(\mathcal{A}, \theta) := s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k)$
- $S(\mathcal{A}, \theta + T) = s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1 + T) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k)$
- $\beta_1 := s((\theta - \alpha_1) + T) = s(\theta - \alpha_1) + T$
- $\beta_2 := s(\beta_1 - \alpha_2) = s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2 + T) = s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) + T$
- Induktiv: $\beta_i = s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_i) + T$
- $\beta_{i+1} = s(s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_i) - \alpha_{i+1} + T) = s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_i) - \alpha_{i+1} + T$
- $S(\mathcal{A}, \theta + T) = S(\mathcal{A}, \theta) + T!$

Formulierung der Aufgabe: Definition 4.4!

- Werkstück W , Plan $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$ ■
- T die kleinste Periode der zu W gehörenden Greiffunktion s ■
- θ beliebige Ausgangsrichtung bezüglich Greifer ■
- $S(\mathcal{A}, \theta) := s(s(\dots s(s(s(\theta - \alpha_1) - \alpha_2) \dots) - \alpha_{k-1}) - \alpha_k) = \gamma(\theta)$. ■
- \mathcal{A} orientiert konvexe Hülle von W **bis auf Symmetrie**, falls in der Menge der möglichen letzten Orientierungen $S(\mathcal{A}, \theta)$ genau $\frac{2\pi}{T}$ Orientierungen sind, die gleichverteilt auf $[0, 2\pi)$ liegen. ■
- $t := \frac{2\pi}{T}$, ■ $\gamma([0, 2\pi)) = \{o_1, o_2, \dots, o_t\}$, ■ $o_i := o_{i+1} + T$ ■

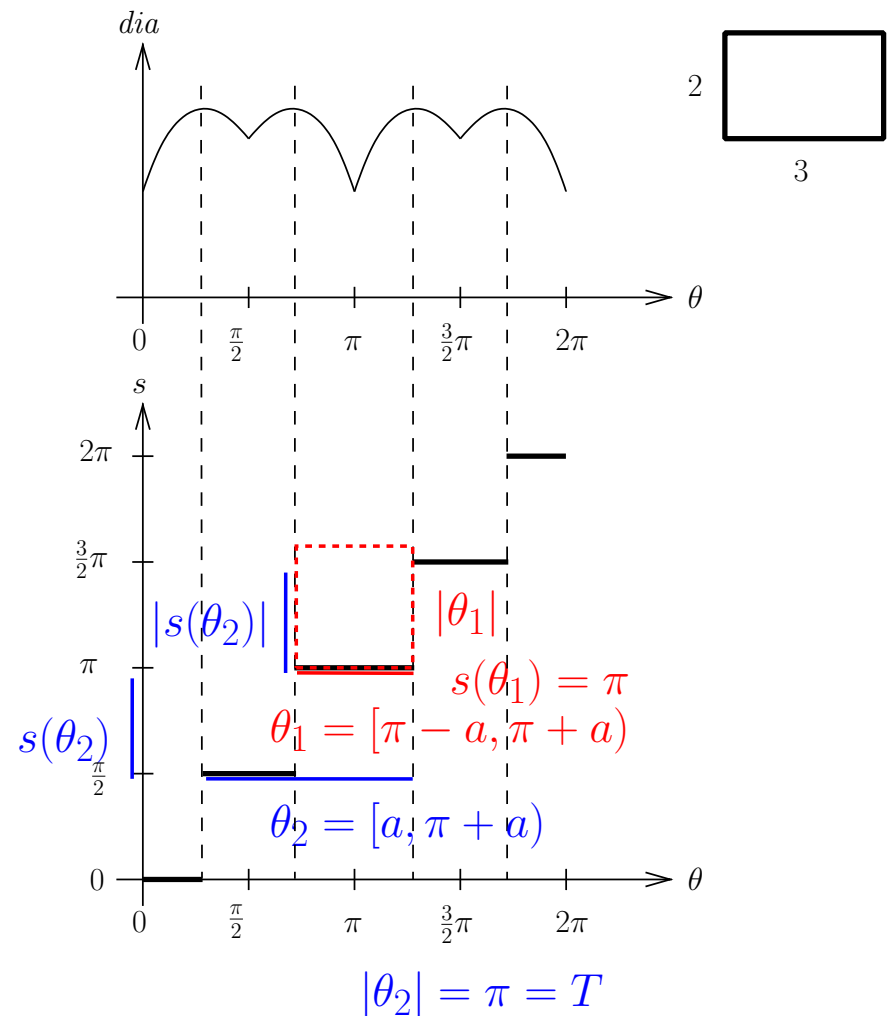
Bezeichnungen!

- **Intervall Θ** ,
zusammenhängende
- Teilmenge von $[0, 2\pi)$ ■
- $|\Theta|$: Länge des Intervalls■
- **s-Intervall**, halboffenes
Intervall $[\xi_i, \nu_i)$, wobei ξ_i
und ν_i Unstetigkeitsstellen der
Greiffunktion sind■
- Zu s-Intervall Θ sei das
s-Image $s(\Theta)$ das kleinste
Intervall, das die Menge
 $\{s(\theta) \text{ mit } \theta \in \Theta\}$ enthält■



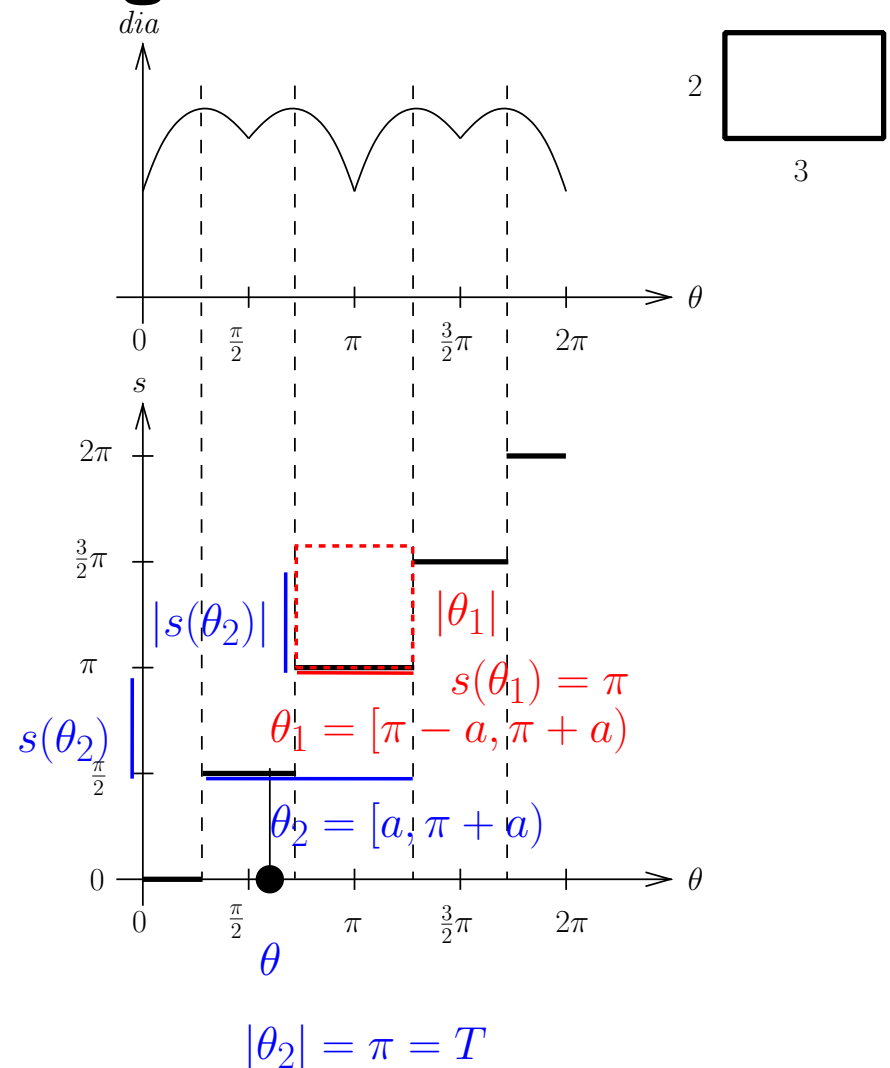
Beispiel Alg.!

- Ber. Durchmesserfkt./Greiffkt.■
 - kl. Periode $T = \pi$
 - zwei Endorientierungen■
 - Bestimme längstes s-Intervall Θ_1 , Greiffunktion stetig■
 - Hier: $\theta_1, s(\theta_1) = \pi$ ■
 - Eine der beiden Richt.■
 - Suche s-Intervall $\Theta \leq T$ mit $|s(\Theta)| < |\Theta_1|$ ■
 - Hier $\theta_2: |s(\Theta_2)| < |\Theta_1|$ ■
 - $|\theta_2| = \pi = T$ fertig!!!■
- ⇒ Liste $L = (\Theta_1, \Theta_2), |\Theta_2| = T$.■



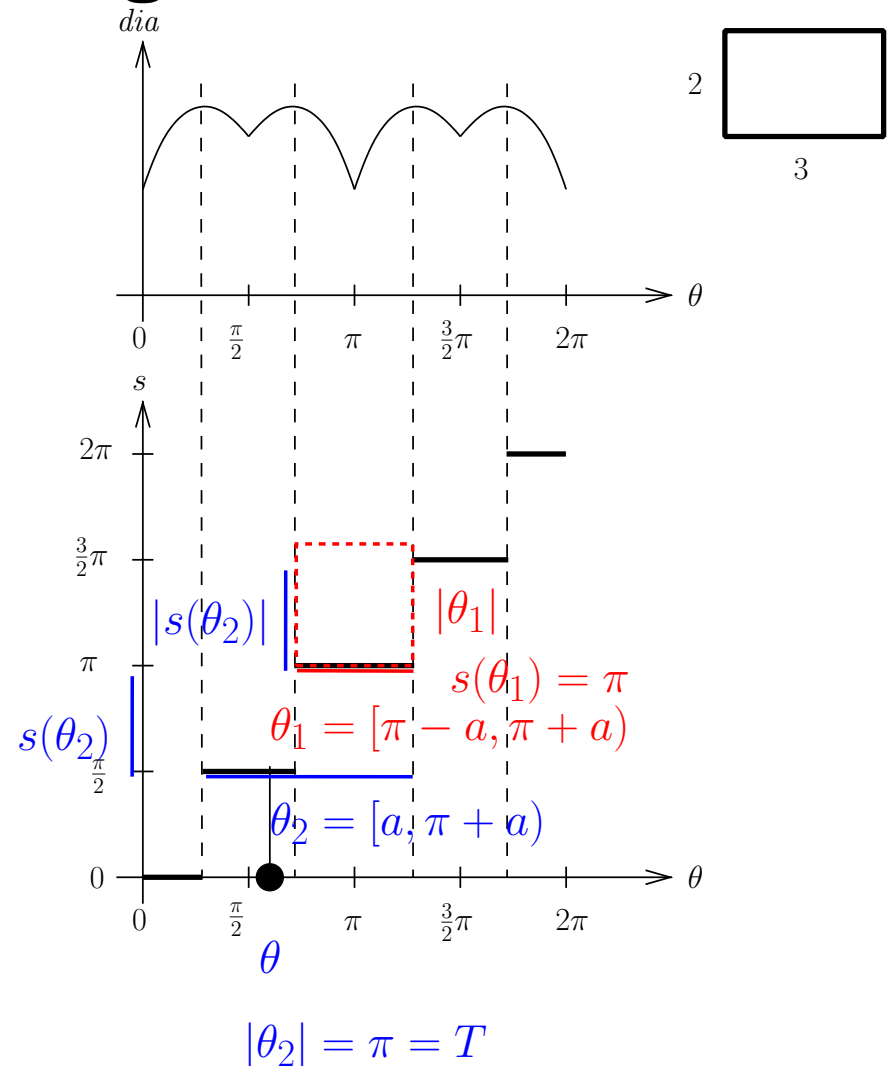
Beispiel Alg.!

- ⇒ Liste $L = (\Theta_1, \Theta_2)$, $|\Theta_2| = T$!
- Startorientierung: θ !
- $\theta \in \Theta_2$ oder $\theta \notin \Theta_2$!
- $S(\mathcal{A}, \theta) = \pi$ oder $S(\mathcal{A}, \theta) = 2\pi$!
- $s(\Theta_1)$ und $s(\Theta_1) + T$!
- $\alpha_2 := 0$, Ann: $\theta \in \Theta_2$:
 $s(\theta) = \gamma \in s(\Theta_2)$!
- $|s(\Theta_2)| < |\Theta_1|$: Wie γ in $s(\Theta_1)$?



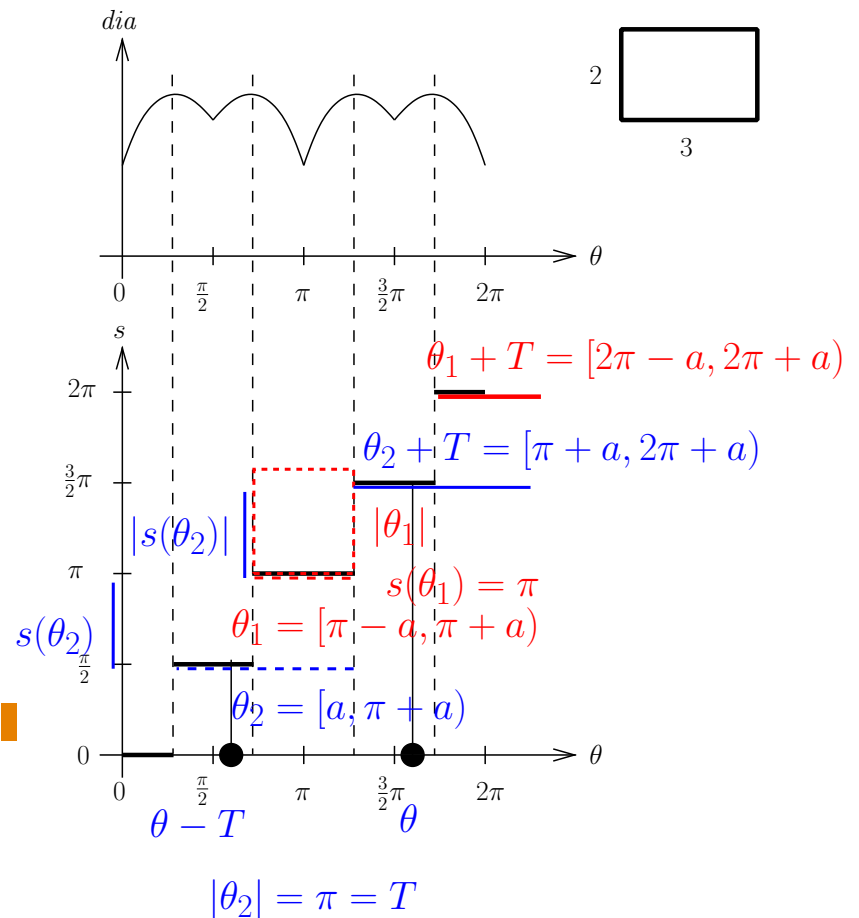
Beispiel Alg.!

- $|s(\Theta_2)| < |\Theta_1|$: Wie γ in $s(\Theta_1)$? ■
- $s(\Theta_2) = [s(\xi_2), s(\nu_2)]$,
 $\Theta_1 = [\xi_1, \nu_1]$ ■
- $\xi_1 \leq s(\theta) - s(\xi_2) + \xi_1 \leq \nu_1$ ■
- $s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1)$, Bereits: $s(\theta)$ ■
- $s(s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1)) \in s(\Theta_1)$ ■
- Mit Drehung $s(\xi_2) - \xi_1$ nach
 $s(\Theta_1) = \pi$ ■
- In die Mitte:
 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} (|\Theta_1| - |s(\Theta_2)|)$ ■
- $s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1 - \varepsilon_1)$ ■



Beispiel Alg.!

- $\theta \notin \Theta_2, \theta \in \Theta_2 + T$ ■
- $\Theta_2 + T := [\xi_2 + T, \nu_2 + T],$
 $s(\Theta_2 + T) := [s(\xi_2 + T), s(\nu_2 + T)],$
 $\Theta_1 + T := [\xi_1 + T, \nu_1 + T]$ ■
- $|s(\Theta_2 + T)| < |\Theta_1 + T|: s(\theta) = \gamma$
 Wie γ in $s(\Theta_1) + T = 2\pi$? ■
- $\xi_1 + T \leq s(\theta) - s(\xi_2 + T) + \xi_1 + T \leq \nu_1 + T$ ■
- $s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1)$, Bereits: $s(\theta)$ ■
- $s(s(\theta) - (s(\xi_2) - \xi_1)) \in s(\Theta_1 + T)$ ■
- Mit Drehung $s(\xi_2) - \xi_1$ nach
 $s(\Theta_1 + T) = \pi + T$ ■
- Mitte: $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} (|\Theta_1| - |s(\Theta_2)|)$ ■



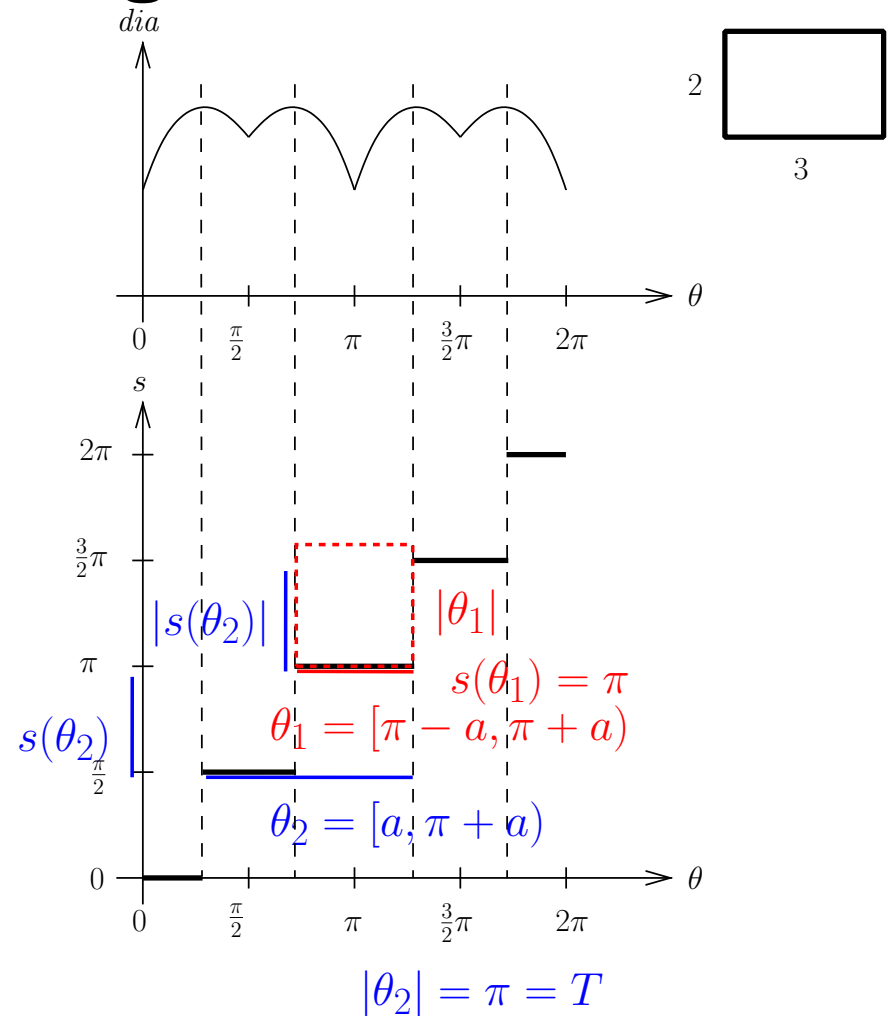
Algorithmus allgemein!

- Berechne Durchmesserfunktion und Greiffunktion, Per. T
 - ● Bestimme das längste s -Intervall Θ_1 , über dem die Greiffunktion stetig ist. Wir legen fest, dass dieses Intervall zur Periode gehört. Setze $i := 1$.
 - Solange ein s -Intervall Θ mit $|s(\Theta)| < |\Theta_i|$ und $|\Theta| \leq |T|$ existiert:
 - Setze Θ_{i+1} auf das Größte dieser s -Intervalle.
 - Inkrementiere i .
- ⇒ Liste $L = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_i)$ mit $|\Theta_i| = T$.

- Berechne aus L einen Plan $\mathcal{A} = (\alpha_i, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_1)$:
 - $\alpha_i := 0$.
 - Für $j = i - 1, i - 2, \dots, 1$: $\alpha_j := s(\xi_{j+1}) - \xi_j - \varepsilon_j + \alpha_{j+1}$.
Dabei ist $\varepsilon_j = \frac{1}{2} (|\Theta_j| - |s(\Theta_{j+1})|)$ eine Fehlertoleranz, u.a. zur Vermeidung instabiler Gleichgewichte.

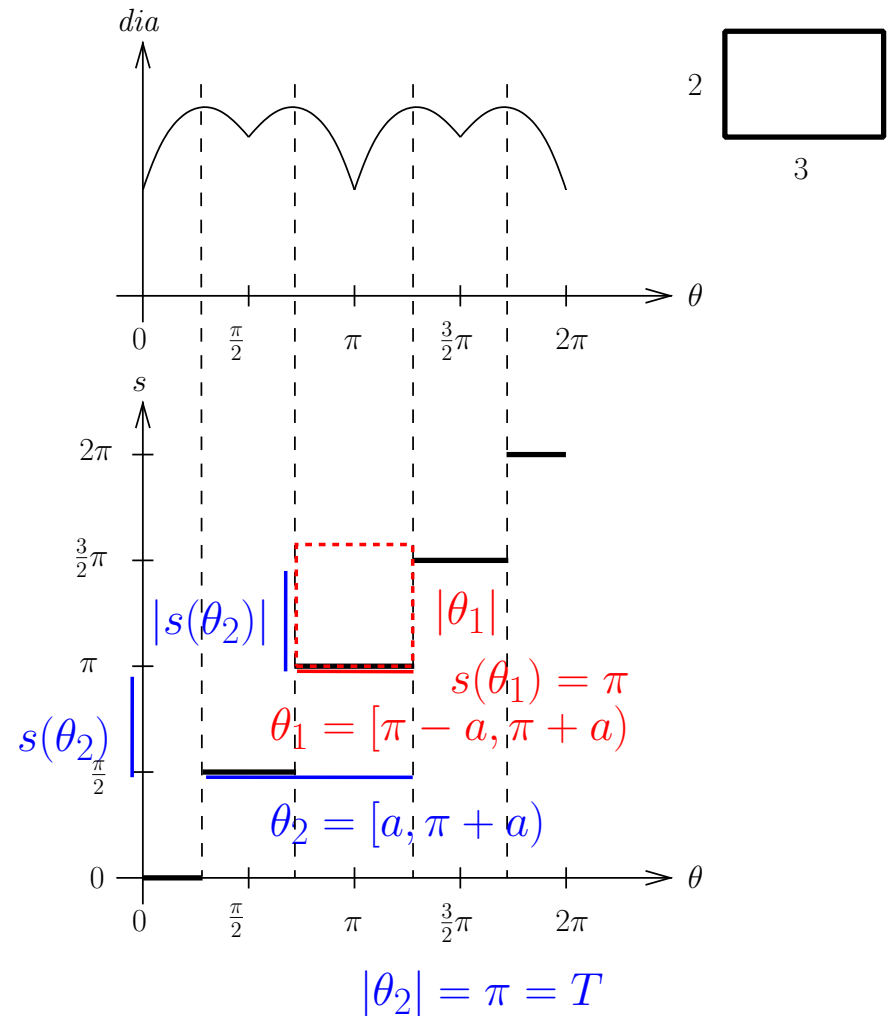
Beispiel Alg.!

- Ber. Durchmesserfkt./Greiffkt.
 - Bestimme längstes s-Intervall Θ_1 , Greiffunktion stetig
 - Solange s-Intervall Θ mit $|s(\Theta)| < |\Theta_i|$ ex.:
 - Setze Θ_{i+1} auf das GröÙte dieser s-Intervalle.
 - Inkrementiere i .
- \Rightarrow Liste $L = (\Theta_1, \Theta_2)$, $|\Theta_2| = T$.



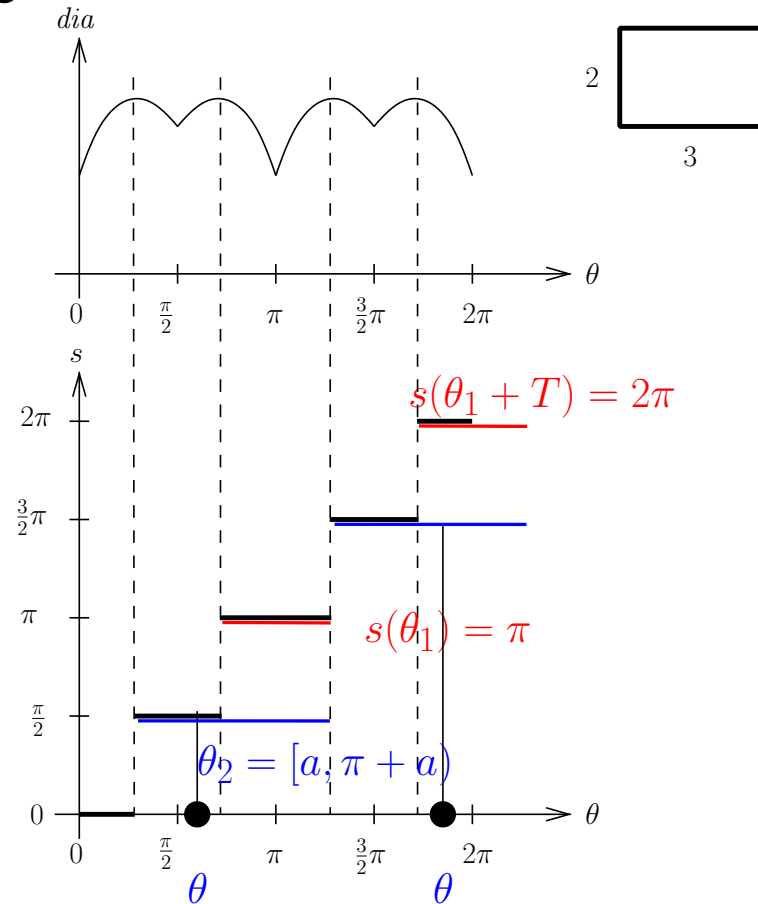
Beispiel Alg.!

- $a := \arctan(3/2)$
- $L = ([\pi - a, \pi + a], [a, \pi + a])$
- mit $|\Theta_2| = T, i = 2$.
 $L = ([\xi_1, \nu_1], [\xi_2, \nu_2])$.
- Plan $\mathcal{A} = (\alpha_i, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_1)$:
 - $\alpha_i = \alpha_2 = 0!$
 - Für $j = i - 1, i - 2, \dots, 1$:
 $\alpha_j := s(\xi_{j+1}) - \xi_j - \varepsilon_j + \alpha_{j+1}$.
 $\varepsilon_j = \frac{1}{2} (|\Theta_j| - |s(\Theta_{j+1})|)$
Fehlertoleranz!
 - $\alpha_2 := 0, \alpha_1 := \pi/2 - (\pi - a) + 0 - 1/2(2a - \pi/2) = -\pi/4$



Bis auf Symmetrie!

- Plan: $\alpha_2 = 0$,
 $\alpha_1 = -\pi/4$
- $a := \arctan(3/2)$
- $\theta \in [a, \pi + a]$ nach π
- $\theta \in [\pi + a, a]$ nach $2\pi = 0$



Ergebnis: Theorem 4.5!

Gegeben sei eine Liste von n Kanten, die die konvexe Hülle eines gegebenen Werkstücks repräsentieren. Dann läßt sich in Zeit $O(n^2 \log n)$ die kürzeste Sequenz von Greifaktionen finden, die eine Orientierung des Werkstücks bis auf Symmetrie garantiert. Der gefundene Plan hat eine Länge von $O(n^2)$.■

Beweis!■