

Offline Bewegungsplanung: Translation und Rotation

Elmar Langetepe
University of Bonn

R konvex! Krit. Platzierungen: Th. 2.32

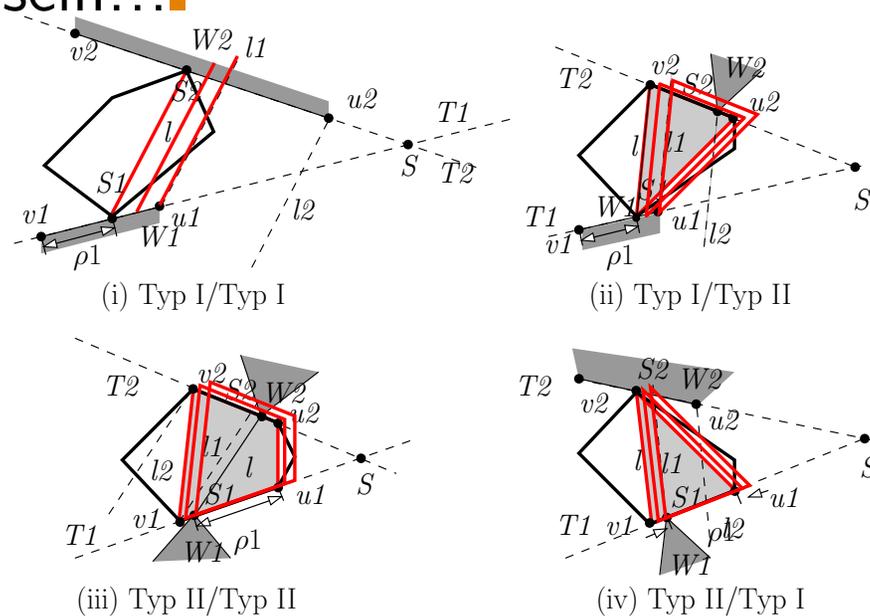
- $|R| = m$ konvex, $\sum |P_i| = n$ ■
- Anzahl Kritische Platzierungen: $O(mn \lambda_6(mn))$ ■
- $\lambda_6(mn) \in O(mn \log^*(mn))$ ■ subquadratisch ■
- Davenport-Schinzel-Sequenzen ■
- Wichtige Elemente für Bahnplanung ■
- Beweis Komplexität ■
- Berechnen! ■

Beschränken: Def. 2.33

- Idee: Zwei Kontaktpaare auswählen, mit Kontakt, drittes Paar später dazu
- Kontakt lebt eine Weile
- Bedingungen an das Paar von Kontaktpaaren
- Klassische Methode: weniger Paare als Tripel
- Funktionen aufbauen

Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!: O_2 beschränkt O_1 bei Θ ■
- T_1, T_2 : Verlängerungen der beteiligten Kanten ■
- Schnittpunkt s , $ch(S_1 \cup S_2)$: Verschieben! ■
- Kontakt von $ch(S_1 \cup S_2)$ mit W_2 bleibt über gesamte Strecke ■
- Muss nicht frei sein!!! ■

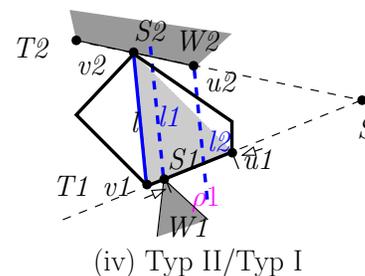
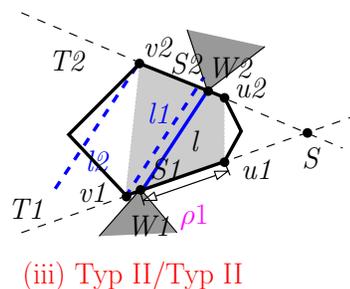
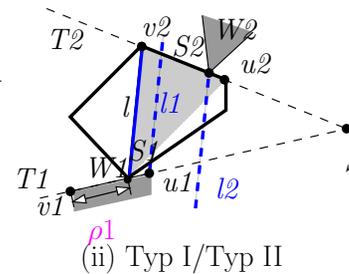
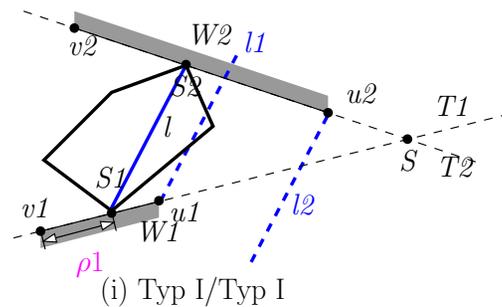


Beschränken: **Lem. 2.34**

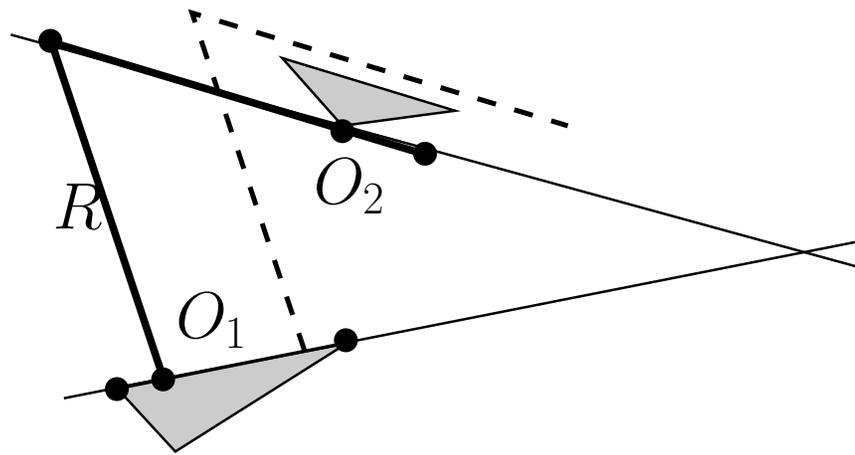
- Kontaktpaare $O_1 = (W_1, S_1)$, $O_2 = (W_2, S_2)$ ■
- Kontakt bei Θ ■
- O_1 beschränkt O_2 oder ■
- O_2 beschränkt O_1 ■
- Beweis!!! ■

Beweis: Lem. 2.34

- O_1 beschränkt O_2 oder O_2 beschränkt O_1 ■
- Fallunterscheidungen: Verschieben! ■
- Endpunkte v_1, v_2, u_1, u_2 in Richtung s ■
- i) l_1 schneidet W_2 oder l_2 schneidet W_1 ■
- Funktionswert ρ für den Winkel! ■

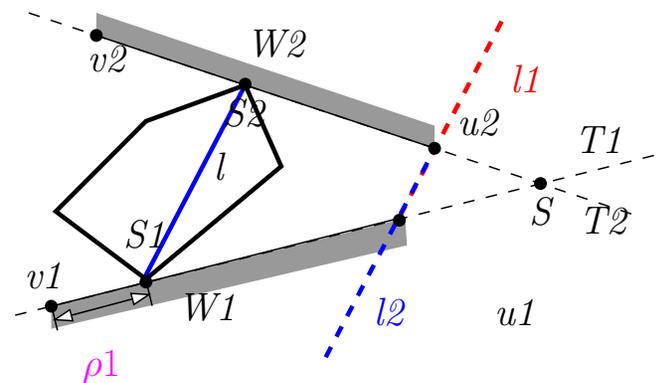


Konvexität geht ein!!



Besonderheit: Bem. 2.35

- Orientierung Θ bei der die Aussage wechselt
- O_1 beschränkt O_2 und O_2 beschränkt O_1 bei Θ
- Definition *Beschränken* leicht abwandeln



(i) Typ I/Typ I

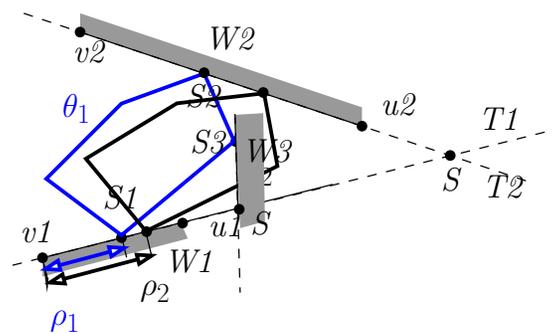
Funktionen und ihre Bedeutung

- Def.-bereich: $\Pi_{O_1 O_2} := \{ \theta | O_2 \text{ beschränkt } O_1 \text{ bei Winkel } \theta \}$. ■
- Wert: $\rho_i := \begin{cases} |\overline{x_i u_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterseite} \\ |\overline{v_i x_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterecke} \end{cases}$ ■
- Funktionen: ■

$$f_{O_1 O_2} : \Pi_{O_1 O_2} \longrightarrow R^{>0}$$

$$\theta \longmapsto \rho_1$$

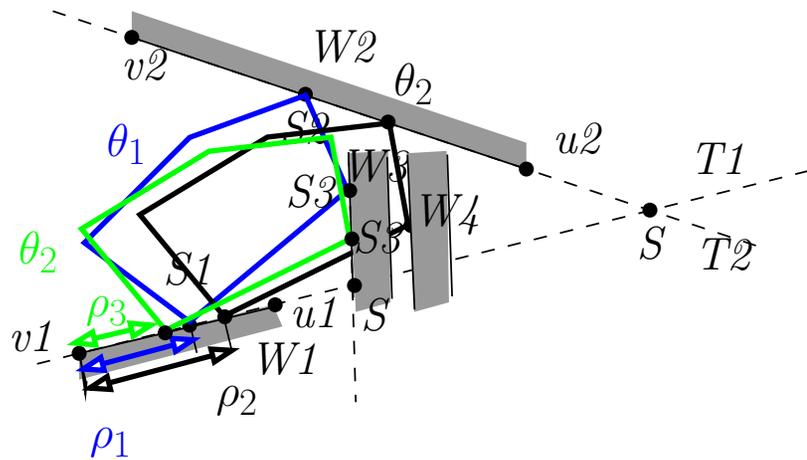
- ■ Dritter Kontakt, O_3 beschränkt O_1 bei θ_1 , Krit. Platzierung? ■



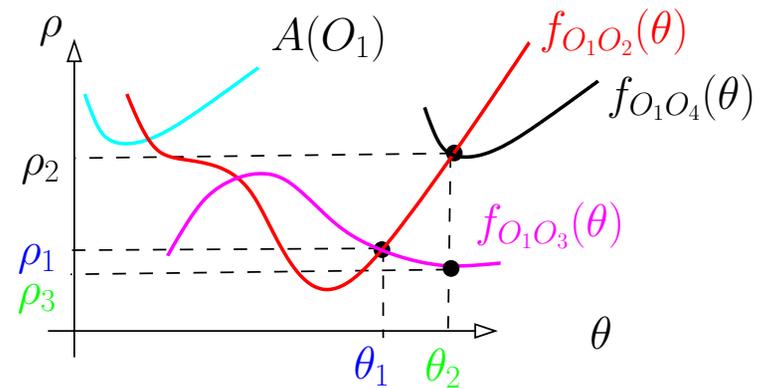
(i) Typ I/Typ I ■

Funktionen und ihre Bedeutung

- O_4 beschränkt O_1 bei θ_2 , keine Krit. Platzierung!!
- Arrangement: $A(O_1)$, alle Funktionen $f_{O_1O_j}$, O_j beschränkt O_1
- Nur untere Kontur des Arrangements ist entscheidend!!!

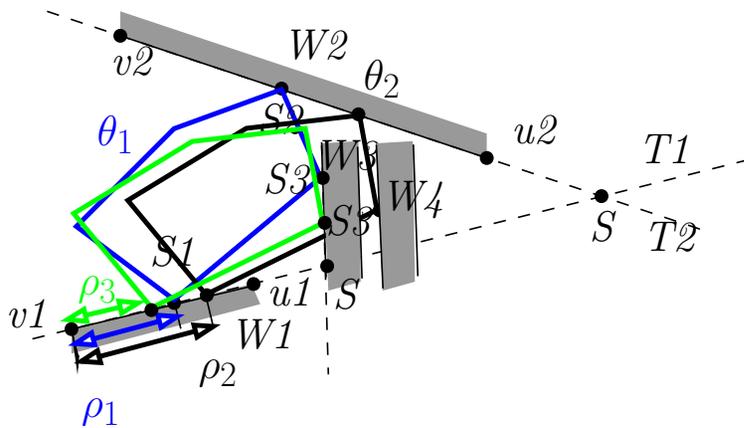


(i) Typ I/Typ I

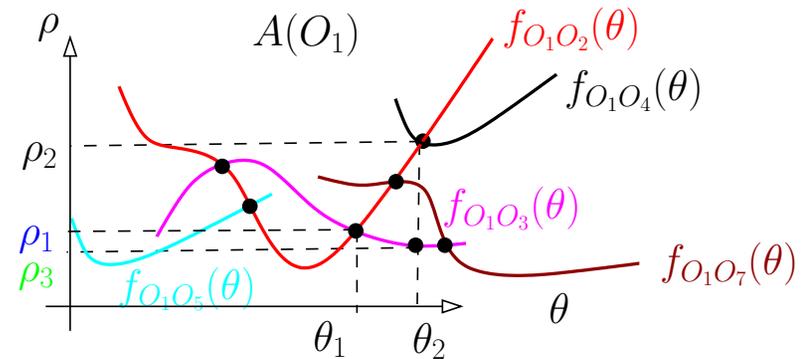


Beweis: Krit. Platz in $O(mn \lambda_6(mn))$

- (x, y, θ) Kritische Platzierung
- Nur den Fall: Drei Kontaktpaare O_1, O_2, O_3
- Fall 1: O_2, O_3 beschränken O_1
- $A(O_1)$, alle Funktionen $f_{O_1 O_j}, O_j$ beschränkt O_1
- Schnittknoten zählen!! Nur die der unteren Kontur!

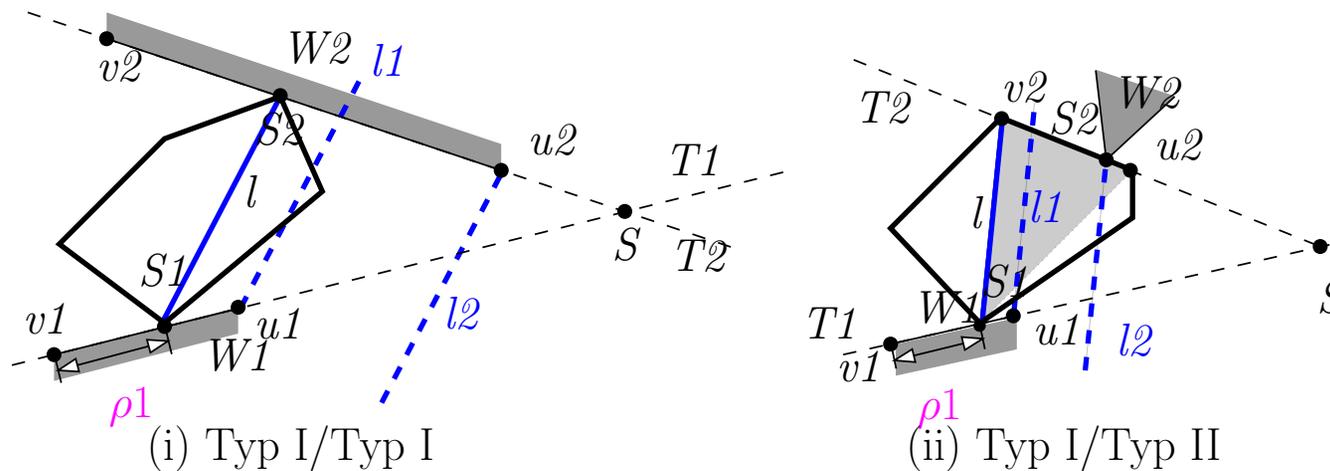


(i) Typ I/Typ I



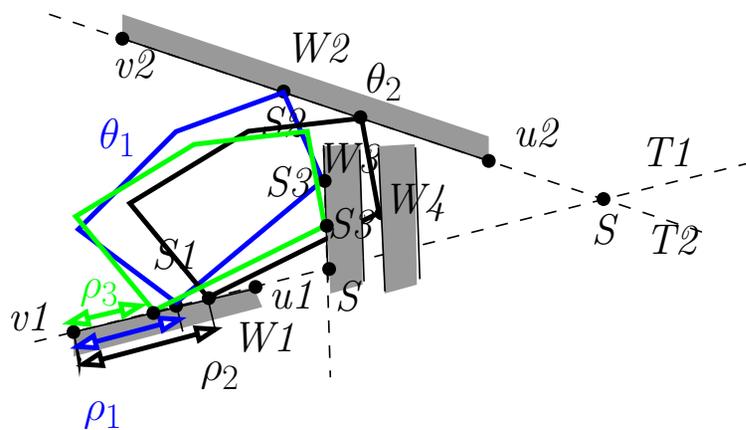
Fall 1: Argumentation gilt stets!!

- Arrangement $A(O_1)$, alle Funktionen $f_{O_1 O_j}$, O_j beschränkt O_1
- Schnittknoten zählen!! Nur die der unteren Kontur!

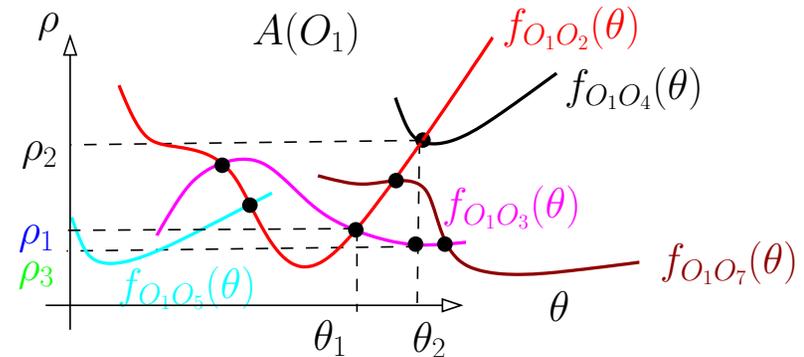


Fall 1: O_2, O_3 beschränken O_1

- Knoten der unteren Kontur zählen!! Nur da geht das! ■
- $A(O_1)$: $2mn$ Funktionen ■
- Zwei schneiden sich maximal 4 mal: ■ Begründung! ■
- $2nm$ Funktionen (Teilintervalle): Untere Kontur $O(\lambda_{4+2}(mn))$ ■
- Für $O(nm)$ viele Kontaktpaare O_1 !! ■ $O(mn\lambda_6(mn))$ ■

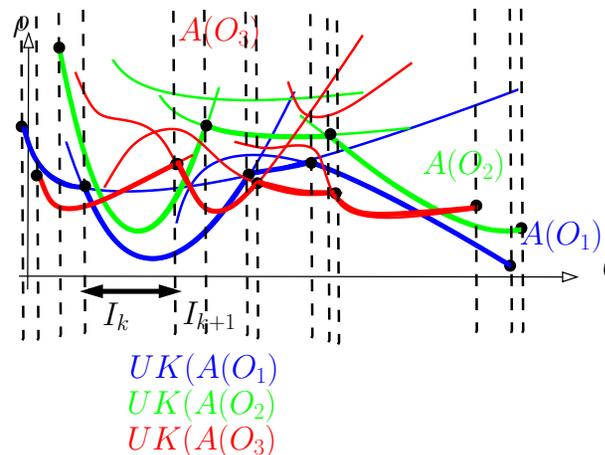


(i) Typ I/Typ I



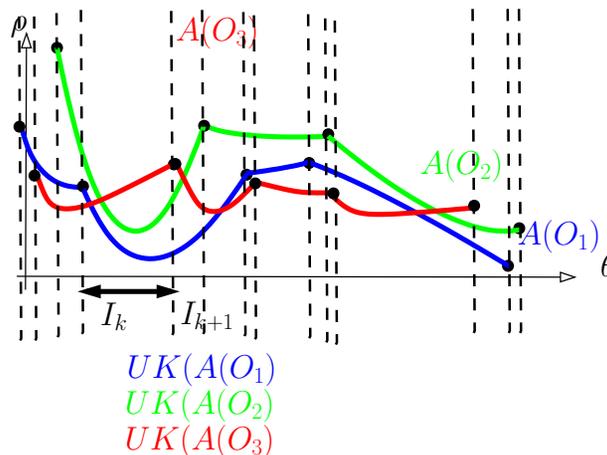
Fall 2: O_2 oder O_3 beschränkt O_1 nicht

- O_2, O_3 beschränken O_1 gibt es nicht
- Kontaktpaare O_1, O_2, O_3 bei Θ
- Für beliebige Benennung: Zyklus: O_1 beschränkt O_3 , O_3 beschränkt O_2 , O_2 beschränkt O_1
- Untere Konturen der Arrangements $A(O_1), A(O_2), A(O_3)$!
- Wechsellpunkte davon ergeben Intervalle: Einzeln prüfen!



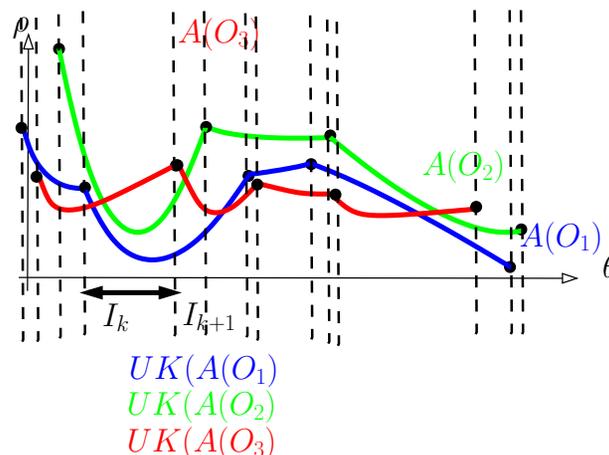
Fall 2: O_1 beschr. O_3 beschr. O_2 beschr. O_1

- Wer beschränkt wen in I_k , **Zyklus!?**
- Alle $O(mn)$ Arrangements $UK(A(O_i))$: $O(mn\lambda_6(mn))$ Intervalle!!
- In I_k für jedes O_j :
 - Welche Funktion $f_{O_j O_l}$? Welche Funktion $f_{O_l O_k}$?
 - Welche Funktion $f_{O_k O_j}$? Krit. Platz.? $O(1)$
- Pro Intervall: Max mn Tripel! **Trotzdem zuviel!**



Fall 2: O_1 beschr. O_3 beschr. O_2 beschr. O_1

- Übergang zum nächsten Intervall! ■ Nur konstant viele neue!!(Begründung)! ■ Test: Krit. Platz.?!■
- Beim Schnitt sind drei Kontaktpaare betroffen!
- Nur mit diesen den Zykel-Test durchführen!!■
- Insgesamt: Anfangs $O(mn)$, dann noch $O(mn\lambda_6(mn))$ dazu!■
- Jeder Zykel kann 4 Kritische Platzierungen bedeuten!!■



Theorem 2.32

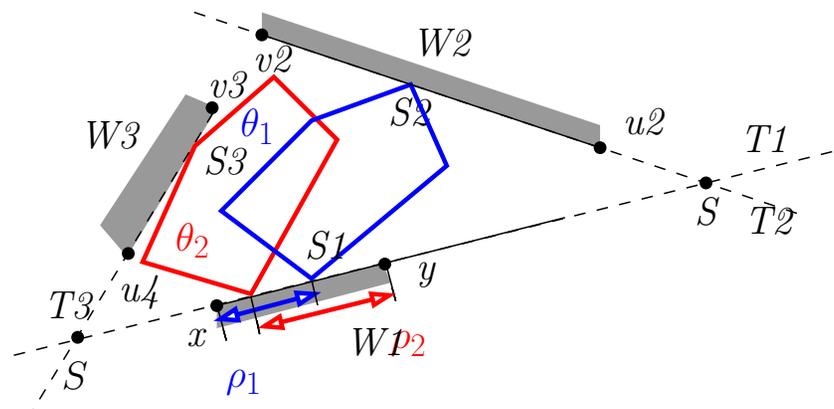
$O(mn\lambda_6(mn))$ Kritische Platzierungen vom Typ mit drei Kontaktpaaren!!

Bemerkung 2.36

- Leiter-Problem $\Theta(n^2)$ Kritische Platzierungen
- Geht auch für konvexen Roboter $\Omega((nm)^2)$
- $\Omega(mn\lambda_6(mn))$ ist offen!!

Besonderheiten der Arrangements $A(O_i)$!

- Ein O_i kann zwei verschiedene Arrangements besitzen
- Je nachdem in welche Richtung wir schieben müssen
- Arrangements $A_L(O_i)$ und $A_R(O_i)$
- Aufwand verdoppelt
- Definitionsbereich kann zerfallen!



Kandidaten Krit. Platz. Def. 2.37

T^+ Platzierungen (x, y, θ) : ■

- a Ecken untere Konturen der $O(mn)$ Arrangements $A(O_i)$ ■
- b Zyklische Tripel von Kontaktpaaren (O_1, O_2, O_3) : ■
 - O_1 beschränkt O_3 , O_3 beschränkt O_2 und O_2 beschränkt O_1 . ■
 - Tripel liefert ≤ 4 Platzierungen ■ Platzierungen durch (ρ_1, θ) (oder $(\rho_2, \theta), (\rho_3, \theta)$) festgelegt. ■
 - Nullstellen einer Kurve 4. Grades. ■

