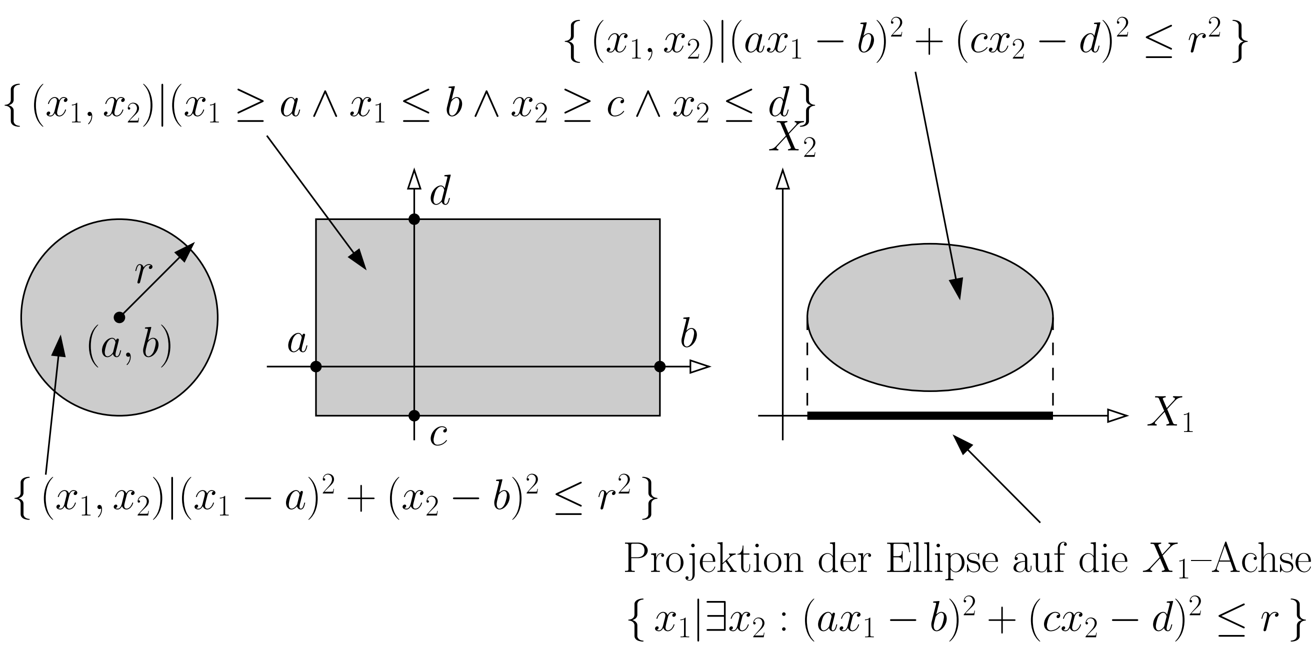
Offline Bewegungsplanung: Allgemeiner Konfigurationsraum

Elmar Langetepe
University of Bonn

Kap. 3.2: Allg. Konfigurationsraum

- Beispiele für einfach beschreibare Objekte
- Kreise, Rechtecke, Ellipsen, Projektionen
- Mittel zur Beschreibung eines Konfigurationsraumes



Definition 3.3: Tarski-Ausdruck (Rekursiv!)

- Jede polynomiale Ungleichung $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} 0$ mit Polynom $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in Q[X_1, X_2, \ldots, X_n]$
- Log. Verknüpfung zweier Tarski–Ausdrücke T_1, T_2:

  $$\neg T_1, \quad T_1 \vee T_2, \quad T_1 \wedge T_2, \quad T_1 \rightarrow T_2$$
- Tarski–Ausdruck $T(X)$, Variable X *frei*, die Ausdrücke: $\exists X : T(X)$ und $\forall X : T(X)$

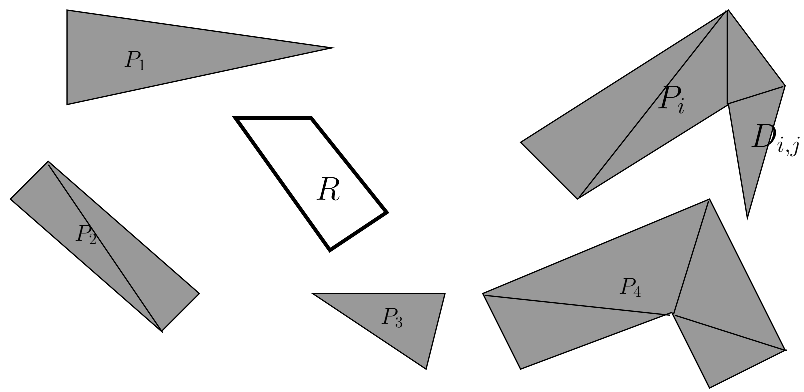
Beispiel: $\exists X : 3X^2 < 10 \wedge \forall Y : \neg(4XY^2 < 20)$

Definition 3.4: Semialgebraische Menge

- Teilmenge $S \subseteq R^n$
- Es ex. Tarski–Ausdruck $T(X_1, \ldots, X_n)$, mit genau den freien Variablen $X_1, \ldots, X_n$
- $S = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | T(x_1, \ldots, x_n)$ gilt$\}$
- S heißt *semialgebraisch*
- Beispiel: $S = \{(x, y, z) | \forall w : w - 3x^2 - z < 10 \vee w + 4zy^2 < 20\}$
- Abgeschlossen bezüglich endl. Vereinigung/Schnitt, Komplement, Projektion

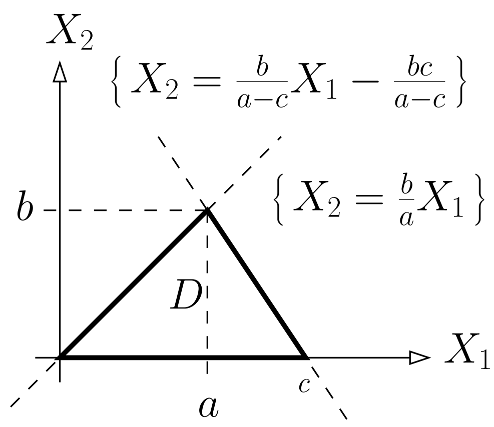
Beispiel Beschreibung C_{frei}!

- Starrer 2-dimensionaler Roboter R und polygonale Szene P
- Hindernis P_i in Dreiecke $D_{i,j}$ zerlegen
- $D_{i,j}$ durch $T_{i,j}(X,Y)$ darstellen!
- $P_i(X_1,X_2) :\equiv T_{i,1}(X_1,X_2) \vee T_{i,2}(X_1,X_2) \vee \ldots \vee T_{i,k}(X_1,X_2)$
- $H(X_1,X_2) :\equiv P_i(X_1,X_2) \vee P_2(X_1,X_2) \vee \ldots \vee P_l(X_1,X_2)$, $R(0,0,0)$ durch $R(X_1,X_2)$



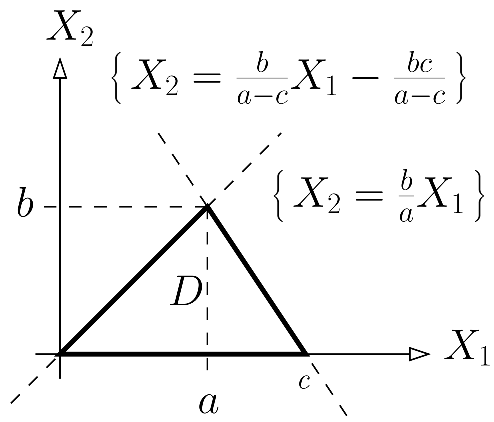
Dreieck D als Tarski Ausdruck!

- $D = \{\, (x_1, x_2) \mid \exists\lambda\, \exists\mu\, (\lambda \geq 0 \wedge \mu \geq 0 \wedge \lambda + \mu \leq 1 \wedge (x_1, x_2) = \lambda(c, 0) + \mu(a, b))\, \}$
- $\{\, (x_1, x_2) | \exists\lambda\, \exists\mu\, (\lambda \geq 0 \wedge \mu \geq 0 \wedge \lambda + \mu \leq 1 \wedge\; x_1 = \lambda c + \mu a \wedge x_2 = \mu b) \quad \}$
- $T_1(x_1, x_2) = \exists\lambda\, \exists\mu\, (\lambda \geq 0 \wedge \mu \geq 0 \wedge \lambda + \mu \leq 1 \wedge\; x_1 = \lambda c + \mu a \wedge x_2 = \mu b)$



Dreieck D als Tarski Ausdruck!

- Alternativ: D als Schnitt von Halbebenen
- $D = \{\, (x_1, x_2) | \underbrace{x_2 \geq 0 \wedge x_2 \leq \frac{b}{a} x_1 \wedge x_2 \leq \frac{b}{a-c} x_1 - \frac{bc}{a-c}}_{T_2(x_1,x_2)} \}$
- T_2 quantorenfrei!! Kein Zufall!!



Drehung und Translation als Tarski Ausdruck!

Hindernisse durch $H(X_1, X_2)$, Roboter: $R(0,0,0)$ durch $R(X_1, X_2)$

Translation: Add. Translationsvektors $\binom{a_1}{a_2}$

Rotation um θ: Anw. Rotationsmatrix: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Nicht explizit $\cos$ und $\sin$: Matrix: $\begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}$ mit $S_1^2 + S_2^2 = 1$

Übergang: $\binom{x_1'}{x_2'} = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix} \binom{x_1}{x_2} + \binom{a_1}{a_2}$

Tarski Ausdruck: $B(X_1, X_2, X_1', X_2', A_1, A_2, S_1, S_2)$

Bedeutung: $\binom{x_1'}{x_2'}$ geht aus Startposition $\binom{x_1}{x_2}$ durch Translation/Rotation mit $\binom{a_1}{a_2} / \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix}$ hervor

Beispiel: Konfigurationsraum als Tarski Ausdruck!

- $B(X_1, X_2, X_1', X_2', A_1, A_2, S_1, S_2),\ R(X_1, X_2),\ H(X_1, X_2)$
- Raum der verbotenen Bewegungen: $C_{\text{verb}}(A_1, A_2, S_1, S_2)$

  $:\equiv \exists\ X_1, X_2, X_1', X_2' \Big(R(X_1, X_2) \wedge H(X_1', X_2') \wedge$
  $B(X_1, X_2, X_1', X_2', A_1, A_2, S_1, S_2)\Big)$
- Von Ausgangsposition zu einer Endposition, diese gehört zu Hindernis
- $C_{\text{frei}}(A_1, A_2, S_1, S_2) :\equiv \neg C_{\text{verb}}(A_1, A_2, S_1, S_2)$
- Raum der verbotenen Bewegungen als semialgebraische Menge

Bewegungsplanung mit dieser Beschreibung!

- Jetzt: Entscheidbarkeit spezieller Tarski Ausdrücke
- Beweistechnik für unsere Zwecke benutzen
- Theorie der reellen Zahlen ist entscheidbar
- Beweistechnik!
- Zerlegung in Zellen

Theorie der reellen Zahlen

- Sei $\Omega = \{\, T | T$ ist Tarski–Ausdruck ohne freie Variablen $\}$
- $\mathrm{TH}(\mathbb{R}) = \{\, \mathrm{T} \in \Omega | \mathrm{T}$ gilt über $\mathbb{R}\,\}$
- Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \forall x\, (x^2 \leq 0 \rightarrow x = 0) & \in TH(\mathbb{R}) \\ \forall x\, \exists y\, (x \geq 0 \rightarrow x = y^2) & \in TH(\mathbb{R}) \\ \exists x\, (x^2 = -1) & \notin TH(\mathbb{R}) \end{array}$$

- **Theorem 3.5**: $\mathrm{TH}(\mathbb{R})$ ist entscheidbar!

Theorie der reellen Zahlen

- **Theorem 3.5**: $\mathrm{TH}(\mathbb{R})$ ist entscheidbar!
- **Theorem 3.6**: Jede semi-algebraische Menge läßt sich durch quantorenfreien Tarski-Ausdruck definieren
- Deshalb Beweistechnik auch für uns anwendbar

Quantoren Elimination: Motivation!

- Ausdruck mit freier Variablen:
  $\phi(Z) = \exists Y \forall X (X^2 - ZX^2 - Y < 0)$
- Wahrheitswert abhängig von Z
- $\phi(Z) = \begin{cases} \text{TRUE} & : \text{ if } Z \geq 1 \\ \text{FALSE} & : \text{ if } Z < 1 \end{cases}$
- $\phi(Z) = (Z \geq 1)$
- Tarski-Ausdruck ohne Quantoren, einfacher!
- Benutzen!!

Quantoren Elimination!

Gilt allgemein:

Theorem 3.6: Jede semi-algebraische Menge läßt sich durch quantorenfreien Tarski-Ausdruck definieren!

Wichtiger Schritt!

Zentrales Resultat zum Beweis!

Theorem 3.5: Die Theorie der reellen Zahlen ist entscheidbar!

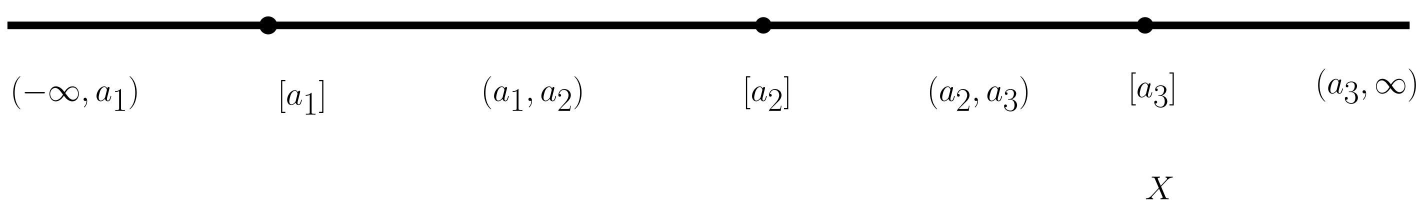
Hilfsmittel: Algebraische Zerlegung $\mathcal{K}_n$ des $\mathbb{R}^n$ **Def. 3.7**

Endl. System $\mathcal{K}_n$ disjunkter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ für die gilt:

- Jede *Zelle* $C_j \in \mathcal{K}_n$ ist semialgebraisch
- Jede Zelle $C_j \in \mathcal{K}_n$ ist homöomorph zu einem $\mathbb{R}^k, k \leq n$
- $\mathcal{K}_n$ ist eine disjunkte Zerlegung des $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m} C_j$
- Besonderheit: C_j homöomorph zu $\mathbb{R}^0$, algebraischer Punkt

Beispiel: Algebraische Zerlegung von $\mathbb{R}$!

- Endliche Menge von offenen Intervallen und Punkten
- Punkte homöomorph zu $\mathbb{R}^0$ (algebraische Punkte)
- Offene Intervalle homöomorph zu $\mathbb{R}$
- Disjunkte Zerlegung



Algebraische Zerlegung $\mathcal{K}_n$ des $\mathbb{R}^n$

- **Def. 3.7:** Probefunktion σ_n, Fkt. $\sigma_n : \mathcal{K}_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, die jeder Zelle C_j Probepunkt $\sigma_n(C_j) \in C_j$ zuordnet
- Beispiel: Zerlegung von $\mathbb{R}$: Punkt auf Punkt, Intervall auf Mittelpunkt des Intervalls
- **Def. 3.7:** Projektion π_n, Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \pi_n : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \\ (X_1, \ldots, X_n) & \longmapsto & (X_1, \ldots, X_{n-1}) \end{array}$$

- Projektion einer Menge $\mathcal{M}$ ist Projektion der Elemente: $\pi_n(\mathcal{M}) := \{ y \mid y = \pi_n(x), x \in \mathcal{M} \}$

Spezielle algebraische Zerlegung $\mathcal{K}_n$ des $\mathbb{R}^n$

Def. 3.8: System $(\mathcal{K}_n, \sigma_n)$ heißt Zylindrische Algebraische Zerlegung (cylindrical algebraic decomposition, CAD, hier: ZAZ) des $\mathbb{R}^n$, falls

- $\mathcal{K}_n$ algebraische Zerlegung mit Probefkt. σ_n
- Für $n > 1$ läßt sich der $\mathbb{R}^{n-1}$ rekursiv zerlegen.
  D.h., es ex. ZAZ $(\mathcal{K}_{n-1}, \sigma_{n-1})$ des $\mathbb{R}^{n-1}$ mit:
  - Probefunktion zu $\mathcal{K}_{n-1}$ ist Projektion der Probefkt. zu $\mathcal{K}_n$:

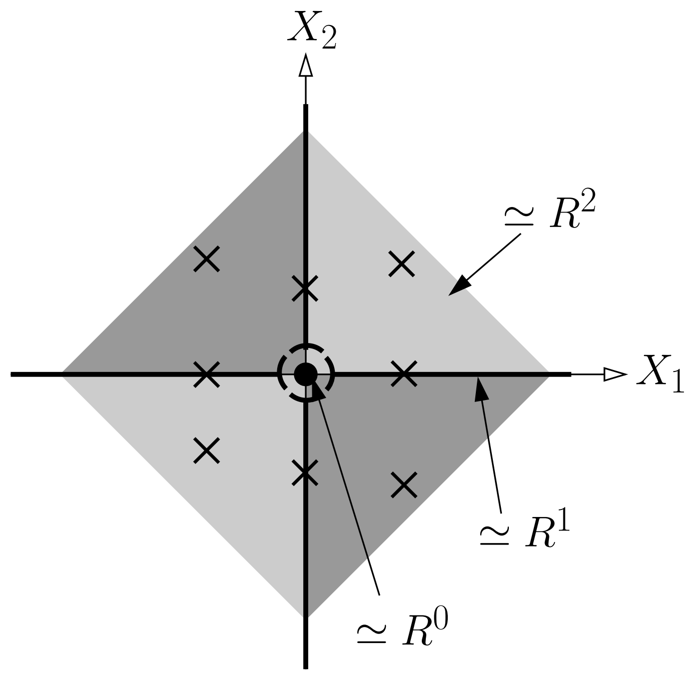
$$\begin{aligned} \sigma_{n-1} : \mathcal{K}_{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ \pi_n(C) &\longmapsto \pi_n(\sigma_n(C)) \end{aligned}$$

- Zu jeder Zelle $C_j \in \mathcal{K}_n$ ex. Zelle $C'_j \in \mathcal{K}_{n-1}$ mit $C'_j = \pi_n(C_j)$, (die Projektion einer Zelle in $\mathcal{K}_n$ ist Zelle in $\mathcal{K}_{n-1}$)
- Für Zellen $C_i, C_j \in \mathcal{K}_n$ mit $\pi_n(C_i) = \pi_n(C_j)$ gilt $\pi_n(\sigma_n(C_i)) = \pi_n(\sigma_n(C_j))$

- Für $n = 1$ ist $\mathcal{K}_1$ Zerlegung von $\mathbb{R}$ in endliche Menge algebraischer Zahlen, und (endliche und unendliche) offenen Intervalle zwischen Zahlen
- Zylinder über C', alle Zellen $C \in \mathcal{K}_n$: $\pi_n(C) = C'$

Beispiel: Zylindr. algebr. Zerl. $\mathcal{K}_2$ des $\mathbb{R}^2$

- 9 Zellen, 1 Punkt, vier Intervalle, 4 Quadranten
- Homöomorph zu $\mathbb{R}^0$,$\mathbb{R}^1$,$\mathbb{R}^2$
- Projektion auf X_1-Achse ergibt $\mathcal{K}_1$ von $\mathbb{R}$
- Zwei Zellen bilden jeweils Zylinder

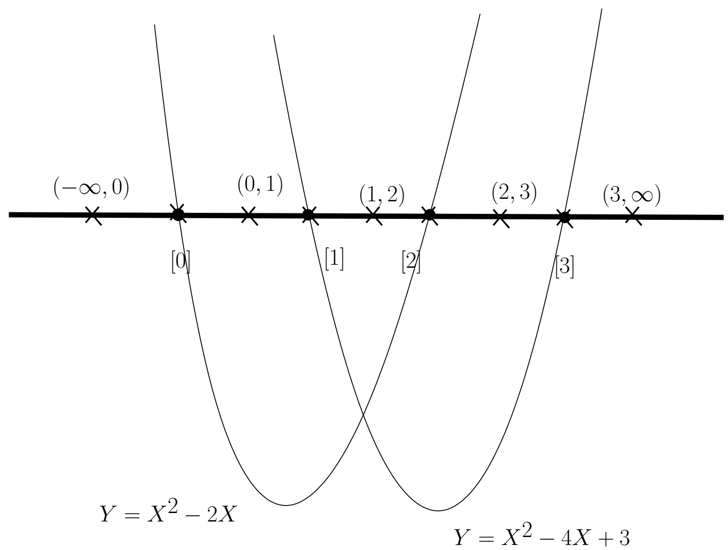


Invarianz bezüglich Polynomen: Def. 3.9

- Zylindrische Algebraische Zerlegung $(\mathcal{K}_n, \sigma_n)$ und Menge von Polynomen $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$
- $(\mathcal{K}_n, \sigma_n)$ heißt $\mathcal{P}$–invariant, falls $\forall f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{P} : \forall C \in \mathcal{K}_n : \mathrm{sign}\left(f\Big|_C\right) = \text{ const}$
- Das gleiche Vorzeichen für alle Punkte der Zelle
- Auswertung für Probestelle reicht

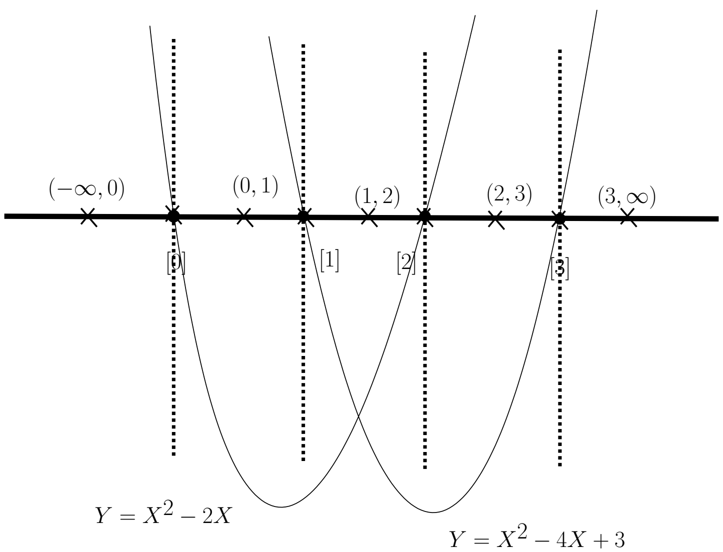
Beispiel: Invarianz bezüglich Polynome

- $\mathcal{P} = \{X^2 - 2X, X^2 - 4X + 3\}$, zwei Parabeln: $(\mathcal{K}_1, \sigma_1)$
- $\mathcal{K}_1$: $(-\infty, 0), [0, 0], (0, 1), [1, 1], (1, 2), [2, 2], (2, 3), [3, 3], (3, \infty)$
- Probefkt: $\sigma_1)$: $-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4$
- Vorzeichen der Polynome ist konstant innerhalb der Zellen
- Auswertung für Probestelle reicht
- Nullstellen von $(X^2 - 2X) \times (X^2 - 4X + 3)$



Idee: Entscheidbarkeit von Tarski-Ausdrücken

- Tarski-Ausdruck ohne freie Variable:
  $\exists X[(X^2 - 2X \leq 0) \wedge (X^2 - 4X + 3 = 0)]$
- Polynom-Invariante Zerlegung $(\mathcal{K}_1, \sigma_1)$ der zugeh. Polynome
- Durch die Probepunkte feststellen, ob die Aussage gültig ist
- Alle Zellen durchgehen, gilt für Probepunkt 1
- $\forall X$ und andere Logik, genauso!



Allgemeines Ergebnis: Theorem 3.10

Gegeben ist eine Menge $\mathcal{P}$ von Polynomen. Man kann eine $\mathcal{P}$–invariante zylindrische algebraische Zerlegung effektiv konstruieren. Die Laufzeit ist polynomiell in Anzahl und Grad der Polynome in $\mathcal{P}$, doppelt exponentiell in der Anzahl der Dimensionen.

Anwendung von Theorem 3.10

- $\mathcal{P}$–invariante Zerlegung berechnen, entscheiden ob Tarski-Ausdruck gültig ist
- Anhand eines Beispiels: $\forall X\, \exists Y : T(X, Y)$
- Berechne T–invariante ZAZ $(\mathcal{K}_2, \sigma_2)$ des $\mathbb{R}^2$
- Polynome in X und Y, die in T vorkommen, haben in jeder Zelle konstantes Vorzeichen
- $(\mathcal{K}_1, \sigma_1)$ sei die projizierte eindimensionale ZAZ
- Wollen Folgendes zeigen:

$\forall X\, \exists Y : T(X, Y)$ ist gültig $\Longleftrightarrow$ für jede Zelle $C' \in \mathcal{K}_1$ gibt es eine Zelle $C \in \mathcal{K}_2$ im Zylinder über C' mit $T(x, y)$ ist wahr für $(x, y) = \sigma_2(C)$

Bsp: $\forall X\, \exists Y : T(X,Y)$

$\forall X\, \exists Y : T(X,Y)$ ist gültig $\Longleftrightarrow$ für jede Zelle $C' \in \mathcal{K}_1$ gibt es eine Zelle $C \in \mathcal{K}_2$ im Zylinder über C' mit $T(x,y)$ ist wahr für $(x,y) = \sigma_2(C)$

Falls das stimmt: Können die Gültigkeit durch endlich viele Tests bestimmen. Probestellen der Zellen verwenden. Jetzt Beweis!

Bsp: $\forall X \, \exists Y : T(X,Y)$

$\forall X \, \exists Y : T(X,Y)$ ist gültig $\Longleftrightarrow$ für jede Zelle $C' \in \mathcal{K}_1$ gibt es eine Zelle $C \in \mathcal{K}_2$ im Zylinder über C' mit $T(x,y)$ ist wahr für $(x,y) = \sigma_2(C)$

"$\Longrightarrow$"

- $C' \in \mathcal{K}_1$. Betrachte $x = \sigma_1(C') \in C'$
- Nach Vor. ex. $\tilde{y}$ mit $T(x,\tilde{y})$
- Sei C die Zelle über C' mit $(x,\tilde{y}) \in C$
- Wg. T–Invarianz gilt auch $T(x,y)$ für $(x,y) = \sigma_2(C)$

Bsp: $\forall X\, \exists Y : T(X,Y)$

$\forall X\, \exists Y : T(X,Y)$ ist gültig $\Longleftrightarrow$ für jede Zelle $C' \in \mathcal{K}_1$ gibt es eine Zelle $C \in \mathcal{K}_2$ im Zylinder über C' mit $T(x,y)$ ist wahr für $(x,y) = \sigma_2(C)$

"$\Longleftarrow$"

- Sei $\tilde{x}$ beliebig, C' die Zelle in $\mathcal{K}_1$ mit $\tilde{x} \in C'$
- Nach Vor. ex es ein $C \in \mathcal{K}_2$ über C' mit $T(x,y)$ für $(x,y) = \sigma_2(C)$
- Es ex ein $\tilde{y}$ mit $(\tilde{x},\tilde{y}) \in C$
- wegen T–Invarianz gilt auch $T(\tilde{x},\tilde{y})$