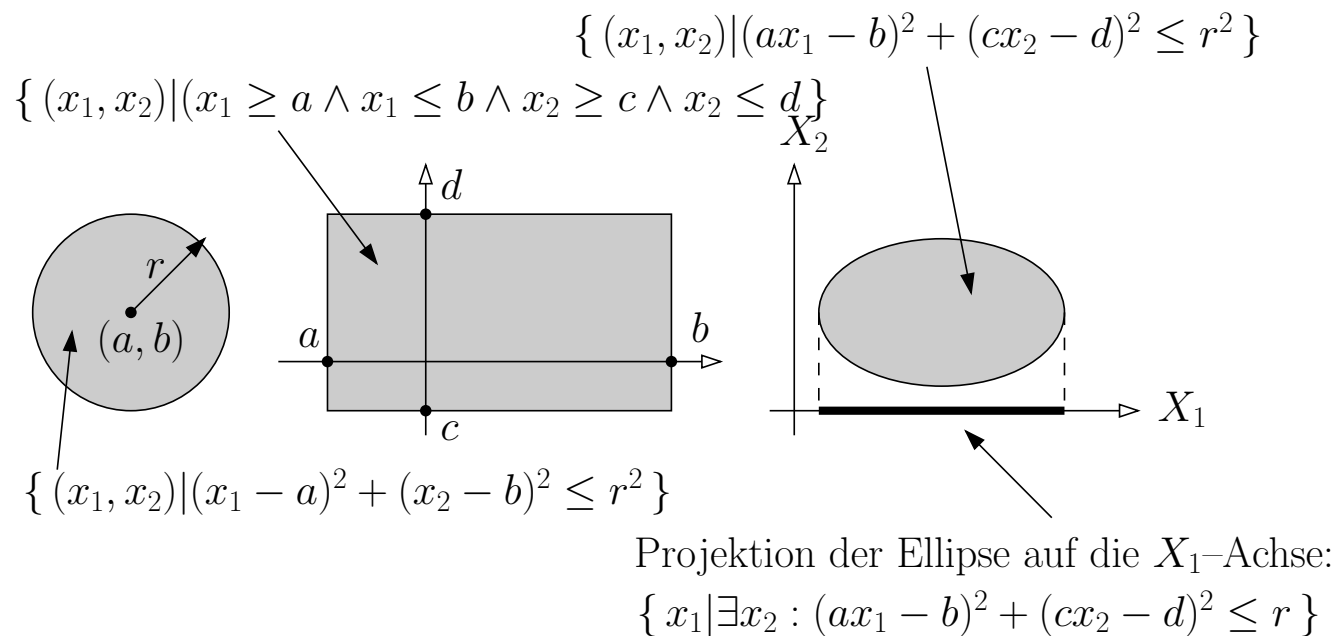


# Offline Bewegungsplanung: Allgemeiner Konfigurationsraum

Elmar Langetepe  
University of Bonn

# Kap. 3.2: Allg. Konfigurationsraum

- Beispiele für einfach beschreibbare Objekte
- Kreise, Rechtecke, Ellipsen, Projektionen
- Mittel zur Beschreibung eines Konfigurationsraumes



## Definition 3.3: Tarski-Ausdruck (Rekursiv!)

- Jede polynomiale Ungleichung  $P(X_1, X_2, \dots, X_n) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$  mit

Polynom  $P(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots, X_n]$  ■

- Log. Verknüpfung zweier Tarski-Ausdrücke  $T_1, T_2$ :  
■

$\neg T_1, \quad T_1 \vee T_2, \quad T_1 \wedge T_2, \quad T_1 \rightarrow T_2$  ■

- Tarski-Ausdruck  $T(X)$ , Variable  $X$  frei, die Ausdrücke:  
■  $\exists X : T(X)$  und  $\forall X : T(X)$  ■

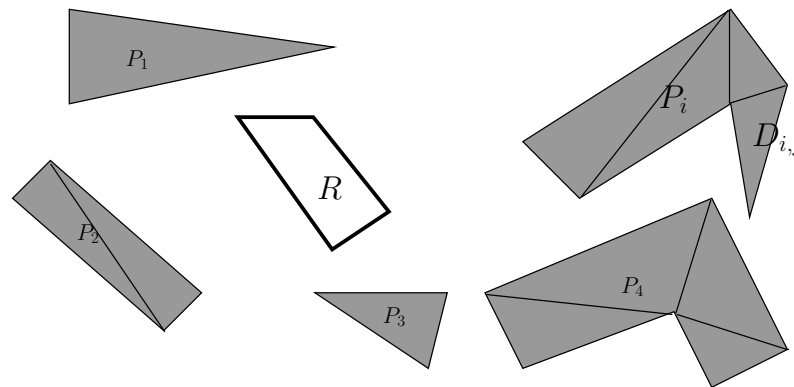
Beispiel:  $\exists X : 3X^2 < 10 \wedge \forall Y : \neg(4XY^2 < 20)$  ■

## Definition 3.4: Semialgebraische Menge

- Teilmenge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  ■
- Es ex. Tarski-Ausdruck  $T(X_1, \dots, X_n)$ , mit genau den freien Variablen  $X_1, \dots, X_n$  ■
- $S = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid T(x_1, \dots, x_n) \text{ gilt} \}$  ■
- $S$  heißt *semialgebraisch* ■
- Beispiel:  $S = \{ (x, y, z) \mid \forall w : w - 3x^2 - z < 10 \vee w + 4zy^2 < 20 \}$  ■
- Abgeschlossen bezüglich endl. Vereinigung/Schnitt, Komplement, Projektion ■

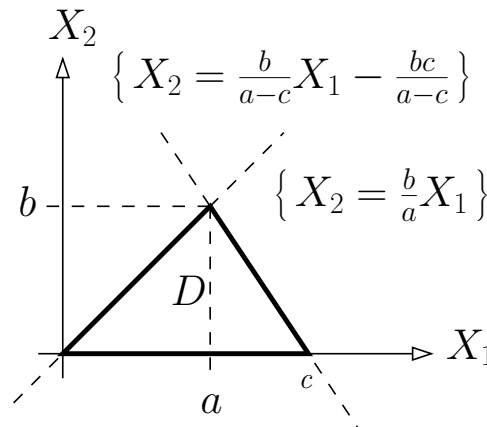
# Beispiel Beschreibung $C_{\text{frei}}$ !

- Starrer 2-dimensionaler Roboter  $R$  und polygonale Szene  $P$  ■
- Hindernis  $P_i$  in Dreiecke  $D_{i,j}$  zerlegen ■
- $D_{i,j}$  durch  $T_{i,j}(X, Y)$  darstellen! ■
- $P_i(X_1, X_2) := T_{i,1}(X_1, X_2) \vee T_{i,2}(X_1, X_2) \vee \dots \vee T_{i,k}(X_1, X_2)$  ■
- $H(X_1, X_2) := P_1(X_1, X_2) \vee P_2(X_1, X_2) \vee \dots \vee P_l(X_1, X_2)$  ■  
 $R(0, 0, 0)$  durch  $R(X_1, X_2)$  ■



# Dreieck $D$ als Tarski Ausdruck!

- $D = \{ (x_1, x_2) \mid \exists \lambda \exists \mu (\lambda \geq 0 \wedge \mu \geq 0 \wedge \lambda + \mu \leq 1 \wedge (x_1, x_2) = \lambda(c, 0) + \mu(a, b)) \}$  ■
- $\{ (x_1, x_2) \mid \exists \lambda \exists \mu (\lambda \geq 0 \wedge \mu \geq 0 \wedge \lambda + \mu \leq 1 \wedge x_1 = \lambda c + \mu a \wedge x_2 = \mu b) \}$  ■
- $T_1(x_1, x_2) = \exists \lambda \exists \mu (\lambda \geq 0 \wedge \mu \geq 0 \wedge \lambda + \mu \leq 1 \wedge x_1 = \lambda c + \mu a \wedge x_2 = \mu b)$  ■



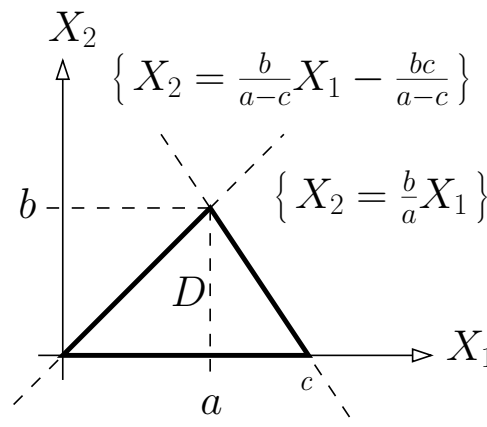
# Dreieck $D$ als Tarski Ausdruck!

- Alternativ:  $D$  als Schnitt von Halbebenen

- $D = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0 \wedge x_2 \leq \frac{b}{a}x_1 \wedge x_2 \leq \frac{b}{a-c}x_1 - \frac{bc}{a-c} \right\}$

$T_2(x_1, x_2)$

- $T_2$  quantorenfrei!! Kein Zufall!!



# Drehung und Translation als Tarski Ausdruck!

Hindernisse durch  $H(X_1, X_2)$ , Roboter:  $R(0, 0, 0)$  durch  $R(X_1, X_2)$ ■

**Translation:** Add. Translationsvektors  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ■

**Rotation um  $\theta$ :** Anw. Rotationsmatrix:  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ■

Nicht explizit cos und sin: ■Matrix:  $\begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}$  mit  $S_1^2 + S_2^2 = 1$ ■

**Übergang:**  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ■

**Tarski Ausdruck:**  $B(X_1, X_2, X'_1, X'_2, A_1, A_2, S_1, S_2)$ ■

**Bedeutung:**  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$  geht aus Startposition  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  durch

Translation/Rotation mit  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix}$  hervor■



# Beispiel: Konfigurationsraum als Tarski Ausdruck!

- $B(X_1, X_2, X'_1, X'_2, A_1, A_2, S_1, S_2), R(X_1, X_2), H(X_1, X_2)$  ■

- Raum der verbotenen Bewegungen:  $C_{\text{verb}}(A_1, A_2, S_1, S_2)$  ■

$$:\equiv \exists X_1, X_2, X'_1, X'_2 \left( R(X_1, X_2) \wedge H(X'_1, X'_2) \wedge B(X_1, X_2, X'_1, X'_2, A_1, A_2, S_1, S_2) \right) \blacksquare$$

- Von Ausgangsposition zu einer Endposition, ■ diese gehört zu Hindernis ■

- $C_{\text{frei}}(A_1, A_2, S_1, S_2) :\equiv \neg C_{\text{verb}}(A_1, A_2, S_1, S_2)$  ■

- Raum der verbotenen Bewegungen als semialgebraische Menge ■

# Bewegungsplanung mit dieser Beschreibung!

- Jetzt: Entscheidbarkeit spezieller Tarski Ausdrücke
- Beweistechnik für unsere Zwecke benutzen
- Theorie der reellen Zahlen ist entscheidbar
- Beweistechnik!
- Zerlegung in Zellen

# Theorie der reellen Zahlen

- Sei  $\Omega = \{ T \mid T \text{ ist Tarski-Ausdruck ohne freie Variablen} \}$ ■
- $TH(\mathbb{R}) = \{ T \in \Omega \mid T \text{ gilt über } \mathbb{R} \}$ ■
- Beispiele:■
  - $\forall x (x^2 \leq 0 \rightarrow x = 0) \in TH(\mathbb{R})$
  - $\forall x \exists y (x \geq 0 \rightarrow x = y^2) \in TH(\mathbb{R})$
  - $\exists x (x^2 = -1) \notin TH(\mathbb{R})$ ■
- **Theorem 3.5:**  $TH(\mathbb{R})$  ist entscheidbar!■

# Theorie der reellen Zahlen

- **Theorem 3.5:**  $\text{TH}(\mathbb{R})$  ist entscheidbar!■
- **Theorem 3.6:** Jede semi-algebraische Menge läßt sich durch quantorenfreien Tarski-Ausdruck definieren■
- Deshalb Beweistechnik auch für uns anwendbar■

# Quantoren Elimination: Motivation!

- Ausdruck mit freier Variablen:
  - $\phi(Z) = \exists Y \forall X (X^2 - ZX^2 - Y < 0)$  ■
- Wahrheitswert abhängig von  $Z$  ■
- $\phi(Z) = \begin{cases} \text{TRUE} & : \text{ if } Z \geq 1 \\ \text{FALSE} & : \text{ if } Z < 1 \end{cases}$  ■
- $\phi(Z) = (Z \geq 1)$  ■
- Tarski-Ausdruck ohne Quantoren, einfacher! ■
- Benutzen!! ■

# Quantoren Elimination!

Gilt allgemein:■

■ **Theorem 3.6:** Jede semi-algebraische Menge läßt sich durch quantorenfreien Tarski-Ausdruck definieren!■

Wichtiger Schritt!■

# Zentrales Resultat zum Beweis!

**Theorem 3.5:** Die Theorie der reellen Zahlen ist entscheidbar!■

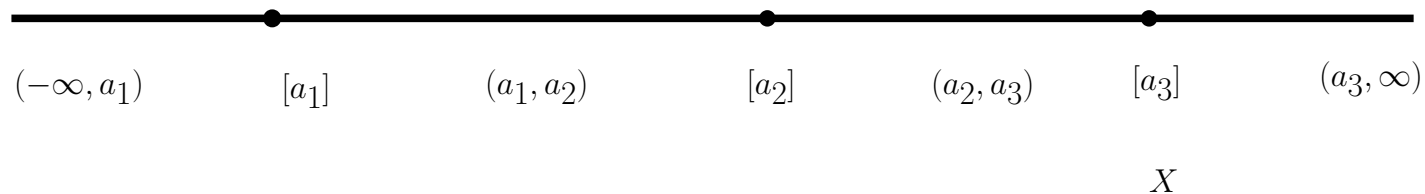
■ Hilfsmittel: Algebraische Zerlegung  $\mathcal{K}_n$  des  $\mathbb{R}^n$  **Def. 3.7**■

Endl. System  $\mathcal{K}_n$  disjunkter Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  für die gilt:■

- Jede Zelle  $C_j \in \mathcal{K}_n$  ist semialgebraisch■
- Jede Zelle  $C_j \in \mathcal{K}_n$  ist homöomorph zu einem  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \leq n$ ■
- $\mathcal{K}_n$  ist eine disjunkte Zerlegung des  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^m C_j$ ■
- Besonderheit:  $C_j$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^0$ , algebraischer Punkt■

# Beispiel: Algebraische Zerlegung von $\mathbb{R}$ !

- Endliche Menge von offenen Intervallen und Punkten
- Punkte homöomorph zu  $\mathbb{R}^0$  (algebraische Punkte)
- Offene Intervalle homöomorph zu  $\mathbb{R}$
- Disjunkte Zerlegung





# Algebraische Zerlegung $\mathcal{K}_n$ des $\mathbb{R}^n$

- **Def. 3.7:** Probefunktion  $\sigma_n$ , Fkt.  $\sigma_n : \mathcal{K}_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , die jeder Zelle  $C_j$  Probepunkt  $\sigma_n(C_j) \in C_j$  zuordnet
- Beispiel: Zerlegung von  $\mathbb{R}$ : Punkt auf Punkt, Intervall auf Mittelpunkt des Intervalls
- **Def. 3.7:** Projektion  $\pi_n$ , Abbildung

$$\begin{aligned}\pi_n : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ (X_1, \dots, X_n) &\longmapsto (X_1, \dots, X_{n-1})\end{aligned}$$

- Projektion einer Menge  $\mathcal{M}$  ist Projektion der Elemente:  
■  $\pi_n(\mathcal{M}) := \{y \mid y = \pi_n(x), x \in \mathcal{M}\}$  ■

# Spezielle algebraische Zerlegung $\mathcal{K}_n$ des $\mathbb{R}^n$

**Def. 3.8:** System  $(\mathcal{K}_n, \sigma_n)$  heißt Zylindrische Algebraische Zerlegung (cylindrical algebraic decomposition, CAD, hier: ZAZ) des  $\mathbb{R}^n$ , falls

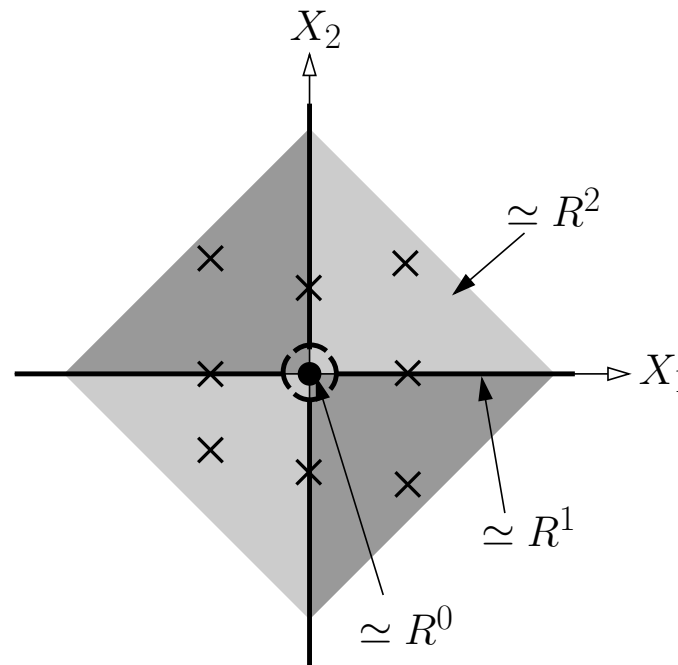
- $\mathcal{K}_n$  algebraische Zerlegung mit Probefkt.  $\sigma_n$
- Für  $n > 1$  läßt sich der  $\mathbb{R}^{n-1}$  rekursiv zerlegen.  
D.h., es ex. ZAZ  $(\mathcal{K}_{n-1}, \sigma_{n-1})$  des  $\mathbb{R}^{n-1}$  mit:
  - Probefunktion zu  $\mathcal{K}_{n-1}$  ist Projektion der Probefkt. zu  $\mathcal{K}_n$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{n-1} : \mathcal{K}_{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ \pi_n(C) &\longmapsto \pi_n(\sigma_n(C))\end{aligned}$$

- Zu jeder Zelle  $C_j \in \mathcal{K}_n$  ex. Zelle  $C'_j \in \mathcal{K}_{n-1}$  mit  $C'_j = \pi_n(C_j)$ ,  
 (die Projektion einer Zelle in  $\mathcal{K}_n$  ist Zelle in  $\mathcal{K}_{n-1}$ )■
- Für Zellen  $C_i, C_j \in \mathcal{K}_n$  mit  $\pi_n(C_i) = \pi_n(C_j)$  gilt  
 $\pi_n(\sigma_n(C_i)) = \pi_n(\sigma_n(C_j))$ ■
- Für  $n = 1$  ist  $\mathcal{K}_1$  Zerlegung von  $\mathbb{R}$  in endliche Menge  
 algebraischer Zahlen, und (endliche und unendliche) offenen  
 Intervalle zwischen Zahlen■
- Zylinder über  $C'$ , alle Zellen  $C \in \mathcal{K}_n$ :  $\pi_n(C) = C'$ ■

## Beispiel: Zylindr. algebr. Zerl. $\mathcal{K}_2$ des $\mathbb{R}^2$

- 9 Zellen, 1 Punkt, vier Intervalle, 4 Quadranten
- Homöomorph zu  $\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$
- Projektion auf  $X_1$ -Achse ergibt  $\mathcal{K}_1$  von  $\mathbb{R}$
- Drei Zellen bilden jeweils Zylinder

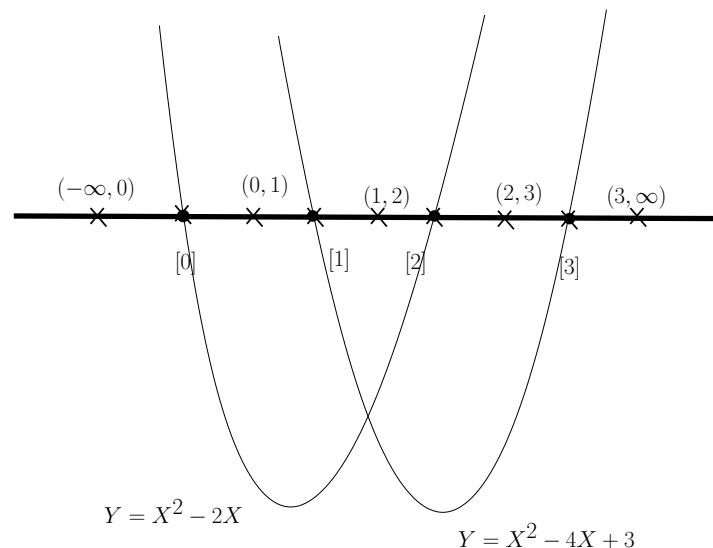


## Invarianz bezüglich Polynomen: Def. 3.9

- Zylindrische Algebraische Zerlegung  $(\mathcal{K}_n, \sigma_n)$  und Menge von Polynomen  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$
- $(\mathcal{K}_n, \sigma_n)$  heißt  $\mathcal{P}$ -invariant, falls
$$\forall f(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{P} : \forall C \in \mathcal{K}_n : \text{sign} \left( f \Big|_C \right) = \text{const}$$
- Das gleiche Vorzeichen für alle Punkte der Zelle
- Auswertung für Probestelle reicht

## Beispiel: Invarianz bezüglich Polynome

- $\mathcal{P} = \{X^2 - 2X, X^2 - 4X + 3\}$ , zwei Parabeln:  $(\mathcal{K}_1, \sigma_1)$
- $\mathcal{K}_1: (-\infty, 0), [0, 0], (0, 1), [1, 1], (1, 2), [2, 2], (2, 3), [3, 3], (3, \infty)$
- Probefkt:  $\sigma_1): -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4$
- Vorzeichen der Polynome ist konstant innerhalb der Zellen
- Auswertung für Probestelle reicht
- Nullstellen von  $(X^2 - 2X) \times (X^2 - 4X + 3)$



# Idee: Entscheidbarkeit von Tarski-Ausdrücken

- Tarski-Ausdruck ohne freie Variable:
  - $\exists X[(X^2 - 2X \leq 0) \wedge (X^2 - 4X + 3 = 0)]$  ■
- Polynom-Invariante Zerlegung  $(\mathcal{K}_1, \sigma_1)$  der zugeh. Polynome ■
- Durch die Probepunkte feststellen, ob die Aussage gültig ist ■
- Alle Zellen durchgehen, gilt für Probepunkt 1 ■
- $\forall X$  und andere Logik, genauso! ■

