Offline Bewegungsplanung: Theorie reeller Zahlen

Elmar Langetepe
University of Bonn

Allgemeines Ergebnis: Theorem 3.10

Gegeben ist eine Menge $\mathcal{P}$ von Polynomen. Man kann eine $\mathcal{P}$–invariante zylindrische algebraische Zerlegung effektiv konstruieren. Die Laufzeit ist polynomiell in Anzahl und Grad der Polynome in $\mathcal{P}$, doppelt exponentiell in der Anzahl der Dimensionen.

Anwendung von Theorem 3.10

- $\mathcal{P}$–invariante Zerlegung berechnen, entscheiden ob Tarski-Ausdruck gültig ist
- Anhand eines Beispiels: $\forall X \, \exists Y : T(X, Y)$
- Berechne T–invariante ZAZ $(\mathcal{K}_2, \sigma_2)$ des $\mathbb{R}^2$
- Polynome in X und Y, die in T vorkommen, haben in jeder Zelle konstantes Vorzeichen
- $(\mathcal{K}_1, \sigma_1)$ sei die projizierte eindimensionale ZAZ
- Wollen Folgendes zeigen:

$\forall X \, \exists Y : T(X, Y)$ ist gültig $\Longleftrightarrow$ für jede Zelle $C' \in \mathcal{K}_1$ gibt es eine Zelle $C \in \mathcal{K}_2$ im Zylinder über C' mit $T(x, y)$ ist wahr für $(x, y) = \sigma_2(C)$

Bsp: $\forall X \, \exists Y : T(X,Y)$

$\forall X \, \exists Y : T(X,Y)$ ist gültig $\Longleftrightarrow$ für jede Zelle $C' \in \mathcal{K}_1$ gibt es eine Zelle $C \in \mathcal{K}_2$ im Zylinder über C' mit $T(x,y)$ ist wahr für $(x,y) = \sigma_2(C)$

Falls das stimmt: Können die Gültigkeit durch endlich viele Tests bestimmen. Probestellen der Zellen verwenden. Jetzt Beweis!

Bsp: $\forall X\, \exists Y : T(X, Y)$

$\forall X\, \exists Y : T(X, Y)$ ist gültig $\Longleftrightarrow$ für jede Zelle $C' \in \mathcal{K}_1$ gibt es eine Zelle $C \in \mathcal{K}_2$ im Zylinder über C' mit $T(x, y)$ ist wahr für $(x, y) = \sigma_2(C)$

"$\Longrightarrow$"

- $C' \in \mathcal{K}_1$. Betrachte $x = \sigma_1(C') \in C'$
- Nach Vor. ex. $\tilde{y}$ mit $T(x, \tilde{y})$
- Sei C die Zelle über C' mit $(x, \tilde{y}) \in C$
- Wg. T–Invarianz gilt auch $T(x, y)$ für $(x, y) = \sigma_2(C)$

Bsp: $\forall X\, \exists Y : T(X,Y)$

$\forall X\, \exists Y : T(X,Y)$ ist gültig $\iff$ für jede Zelle $C' \in \mathcal{K}_1$ gibt es eine Zelle $C \in \mathcal{K}_2$ im Zylinder über C' mit $T(x,y)$ ist wahr für $(x,y) = \sigma_2(C)$

"$\Longleftarrow$"

- Sei $\tilde{x}$ beliebig, C' die Zelle in $\mathcal{K}_1$ mit $\tilde{x} \in C'$
- Nach Vor. ex es ein $C \in \mathcal{K}_2$ über C' mit $T(x,y)$ für $(x,y) = \sigma_2(C)$
- Es ex ein $\tilde{y}$ mit $(\tilde{x},\tilde{y}) \in C$
- wegen T–Invarianz gilt auch $T(\tilde{x},\tilde{y})$

Theorem 3.5

- Theorie der reellen Zahlen ist entscheidbar
- Tarski-Ausdrücke ohne freie Variablen
- Gleiches Prinzip wie beim Beispiel: $\forall X \, \exists Y : T(X, Y)$
- Benutze T–invariante ZAZ $(\mathcal{K}_n, \sigma_n)$ des $\mathbb{R}^n$
- Leicht zu verallgemeinern: Induktiv!
- Anzahl der Quantoren
- Endliche Anzahl an Tests

Beweis von Theorem 3.10

Gegeben ist eine Menge $\mathcal{P}$ von Polynomen. Man kann eine $\mathcal{P}$–invariante zylindrische algebraische Zerlegung effektiv konstruieren. Die Laufzeit ist polynomiell in Anzahl und Grad der Polynome in $\mathcal{P}$, doppelt exponentiell in der Anzahl der Dimensionen.

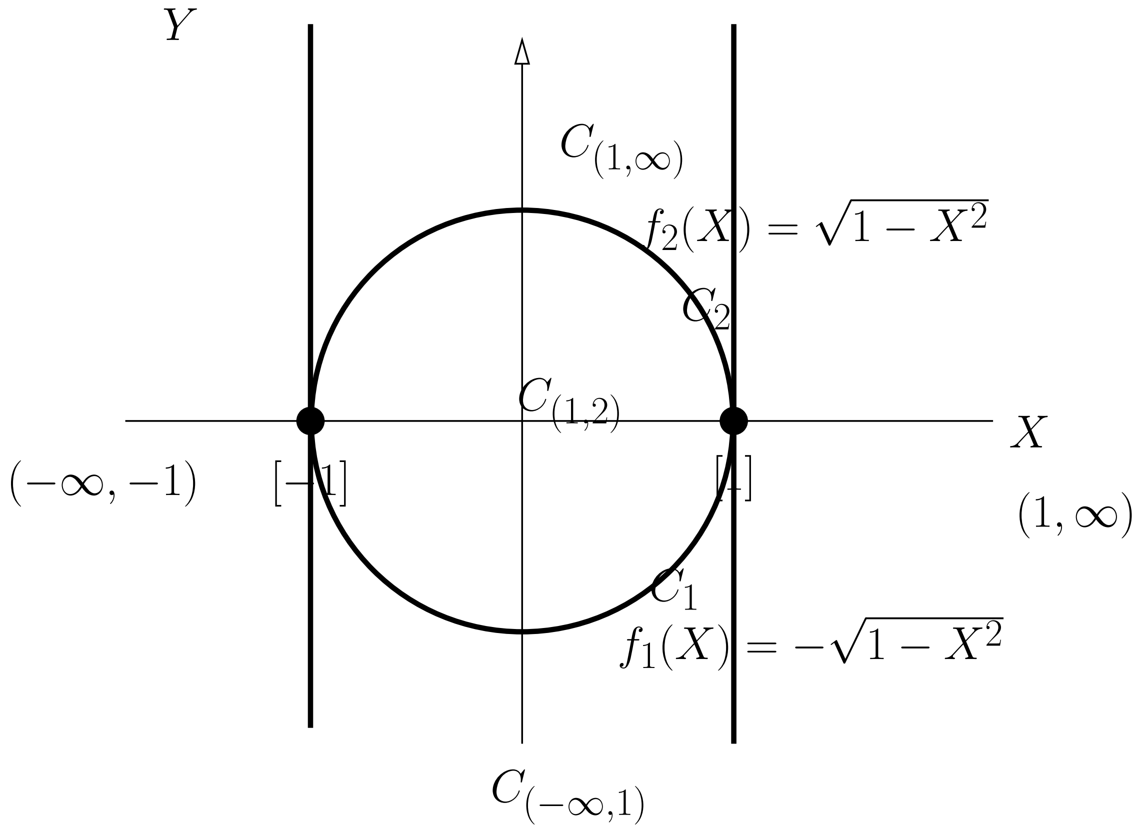
- Beispiel: $C_{\text{frei}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 1 > 0\}$
- Polynom: $P(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1 > 0$
- Polynom über Y: $P_X(Y) = Y^2 + (X^2 - 1)$ Grad 2
- Je nach X Wert: Anzahl versch. reell. Nullstellen

Beispiel Beweis Theorem 3.10

- Polynom über Y: $P_X(Y) = Y^2 + (X^2 - 1)$ Grad 2
- Je nach X-Wert: Anzahl versch. reell. Nullstellen
- Bedingung: $X^2 - 1 > 0$, $X^2 - 1 = 0$, $X^2 - 1 < 0$
- Polynomielle Bedingung: Anzahl Nullst. gleich
- Induktiv: ZAZ $(\mathcal{K}_1, \sigma_1)$ für $Q(X) = X^2 - 1$
- Zellen: $(-\infty, -1), [-1], (-1, +1), [+1], (+1, +\infty)$
- Lifting Zelle $\mathcal{K}_1$ nach $\mathcal{K}_2$
- Zylinder in Zellen aufteilen nach reell. Nullst.
- $\{-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\}$ für $x \in \{-1, 1\}$, $\{0\}$ für $x = -1$ und $x = 1$, und $\emptyset$ sonst

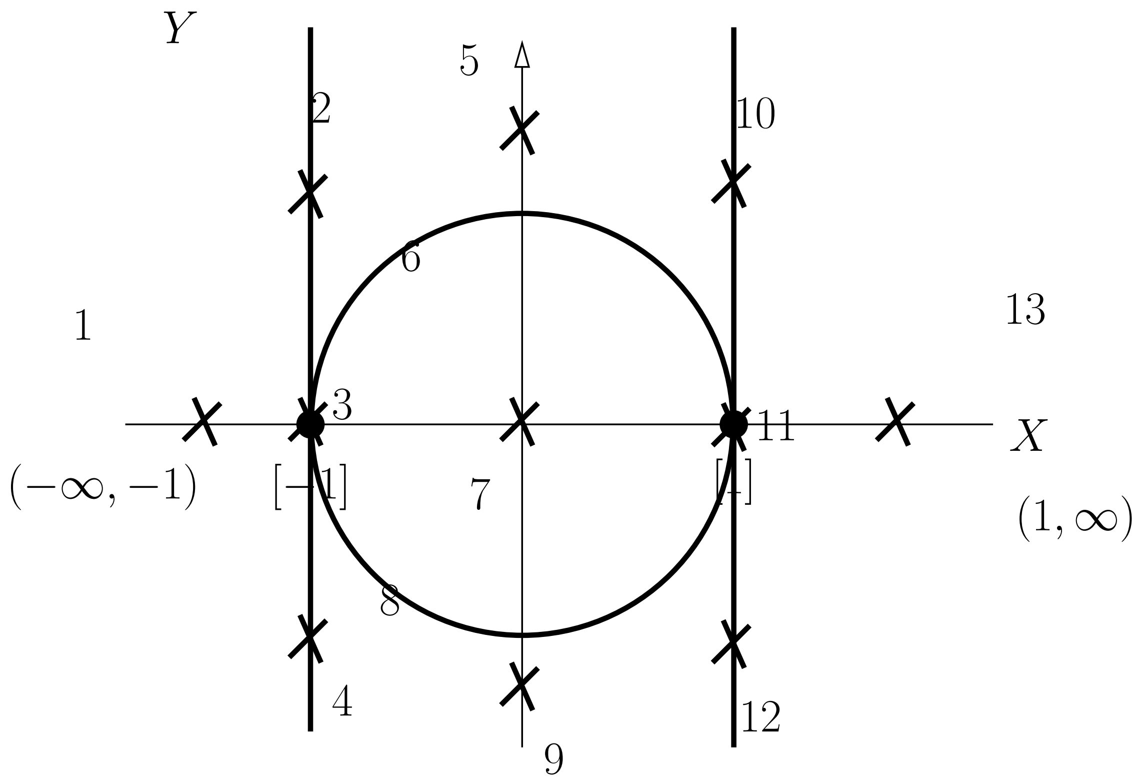
Beispiel Beweis Theorem 3.10

- Bereich $x \in \{-1, 1\}$: $f_1(X) = -\sqrt{1 - X^2} < f_2(X) = \sqrt{1 - x^2}$
- $y < f_1(x)$, $y = f_1(x)$, $f_1(x) < y < f_2(x)$, $f_2(x) = y$, $f_2(x) < y$



Beispiel Beweis Theorem 3.10

- Restliche Bereiche: $x = -1$ und $x = 1$ und sonst
- Insgesamt 13 Zellen! Probefunktion übertragen



Allgemeines Ergebnis: Theorem 3.10

Gegeben ist eine Menge $\mathcal{P}$ von Polynomen. Man kann eine $\mathcal{P}$–invariante zylindrische algebraische Zerlegung effektiv konstruieren. Die Laufzeit ist polynomiell in Anzahl und Grad der Polynome in $\mathcal{P}$, doppelt exponentiell in der Anzahl der Dimensionen.

Weitere Anwendung: Quantoren Elimination!

Gilt allgemein:

Theorem 3.6: Jede semi-algebraische Menge läßt sich durch quantorenfreien Tarski-Ausdruck definieren!

Wichtiger Schritt!

Anwendung von Theorem 3.10

- Elimination von Quantoren: **Theorem 3.6**
- Anhand eines Beispiels: $S = \{\, x | \exists Y : H(x, Y) \,\}$
- x frei, Y gebunden, eliminieren
- $(\mathcal{K}_2, \sigma_2)$ ZAZ für die Polynome in H
- Zelle C: α_C quantorenfreier Tarski–Ausdruck, der C definiert
- Betrachte $\mathcal{C} := \{\, C' \in \mathcal{K}_1 | \exists C \in \mathcal{K}_2$ über C' mit $H(x, y)$ für $(x, y) = \sigma_2(C) \,\}$
- $\alpha(x) := \bigvee\limits_{C' \in \mathcal{C}} \alpha_{C'}(x)$ quantorenfrei
- **Behauptung:** $S = \{\, x | \exists Y\, H(x, Y) \,\} \stackrel{!}{=} \{\, x | \alpha(x) \,\}$

Anwendung von Theorem 3.10

Behauptung: $S = \{\, x | \exists Y\; H(x, Y) \,\} \stackrel{!}{=} \{\, x | \alpha(x) \,\}$

$\mathcal{C} := \{\, C' \in \mathcal{K}_1 | \exists C \in \mathcal{K}_2$ über C' mit $H(x, y)$ für $(x, y) = \sigma_2(C) \,\}$

$$\alpha(x) := \bigvee_{C' \in \mathcal{C}} \alpha_{C'}(x)$$

"$\subseteq$" Gelte $H(\tilde{x}, \tilde{y})$. Dann sei $\tilde{x} \in \tilde{C}$, und C sei die Zelle über $\tilde{C}$ mit $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in C$. Dann gilt auch $H(x, y)$ für $(x, y) = \sigma_2(C)$. Also ist $\tilde{C} = C' \in \mathcal{C}$ und wegen $x, \tilde{x} \in C'$ folgt $\alpha(\tilde{x})$. $\square$

Anwendung von Theorem 3.10

Behauptung: $S = \{\, x | \exists Y \; H(x, Y) \,\} \stackrel{!}{=} \{\, x | \alpha(x) \,\}$

$\mathcal{C} := \{\, C' \in \mathcal{K}_1 | \exists C \in \mathcal{K}_2$ über C' mit $H(x, y)$ für $(x, y) = \sigma_2(C) \,\}$

$$\alpha(x) := \bigvee_{C' \in \mathcal{C}} \alpha_{C'}(x)$$

"$\supseteq$" Gelte $\alpha(\tilde{x})$. Dann gilt auch $\alpha_{C'}(\tilde{x})$ für ein $C' \in \mathcal{C}$, also auch $\tilde{x} \in C'$. Sei C die Zelle über C' mit $H(x, y)$ für $(x, y) = \sigma_2(C)$, dann gilt auch $H(\tilde{x}, \tilde{y})$, für ein $\tilde{y}$ mit $(\tilde{x}, \tilde{y})$ in C. $\square$

Quantoren Elimination!

Gilt allgemein:

Theorem 3.6: Jede semi-algebraische Menge läßt sich durch quantorenfreien Tarski-Ausdruck definieren!

Beweis: Verallgemeinerung des obigen Beweises!

Strukturelle Induktion über den Aufbau von Tarski-Ausdrücken!

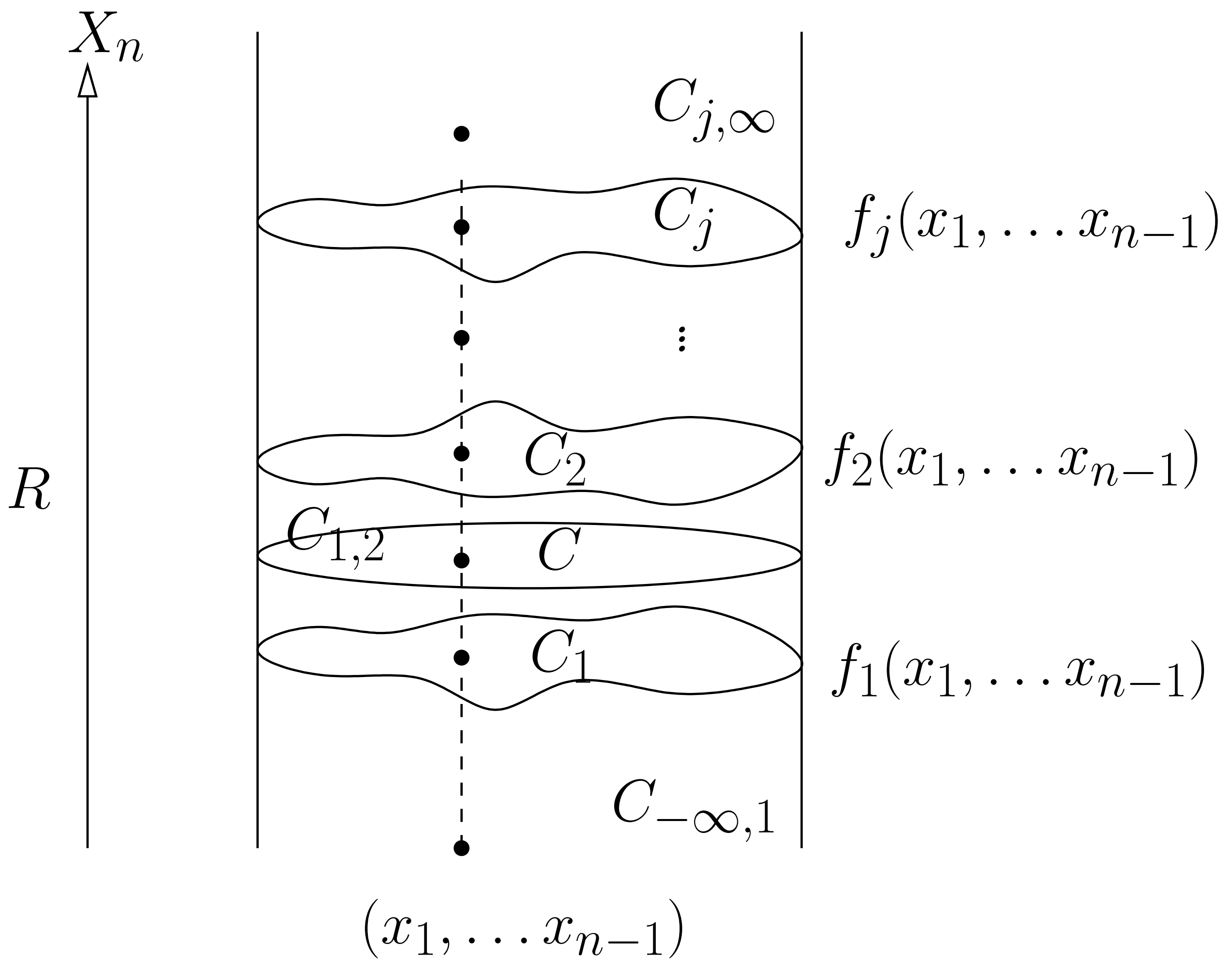
Beweis Theorem 3.10

- Prinzip wie im Bsp., nun $P(X_1, \ldots, X_n) := \prod_{P_i \in \mathcal{P}} P_i$
- Induktiv! ZAZ Dimension 1 bereits klar! Reellw. Nullstellen
- $n > 1$: $P(X_1, \ldots, X_n)$ als Polynom in X_n:
  $\hat{P}(X_n) := P_{(X_1, \ldots, X_{n-1})}(X_n)$
- Je nach Bedingung an $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ hat $\hat{P}$ eine konstante Anzahl reellwertiger Nullstellen
- Polynomielle Bedingungen an $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ kann man dafür finden, vorhin $X^2 - 1$ für $P_X(Y) = (X^2 - 1) + Y^2$
- ZAZ für polynomiellen Bedingungen, Dim: $n - 1$
- $(\mathcal{K}_{n-1}, \sigma_{n-1})$: In jeder Zelle hat $\hat{P}$ konstante Anzahl Nullstellen

- Für Zelle C mit j Nullstellen als stetige Fkt.:
  $f_1(X_1, \ldots, X_{n-1}) < f_2(X_1, \ldots, X_{n-1}) < \ldots < f_j(X_1, \ldots, X_{n-1})$
- Daraus den Zylinder für die Zelle C bauen

Beweis Theorem 3.10

- $C_{-\infty,1} = \{ (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) | (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C,\ y < f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) \}$
- $C_1 = \{ (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) | (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C,\ y = f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) \}$
- $C_i = \{ (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) | (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C,\ y = f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) \}$
- $C_{i,i+1} = \{ (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) | (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C, f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) < y < f_{i+1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \}$
- $C_{j,\infty} = \{ (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) | (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C,\ f_j(x_1, \ldots, x_{n-1}) < y \}$


X_n
$C_{j,\infty}$
C_j
$f_j(x_1, \ldots x_{n-1})$
$\vdots$
C_2
$f_2(x_1, \ldots x_{n-1})$
R
$C_{1,2}$
C
C_1
$f_1(x_1, \ldots x_{n-1})$
$C_{-\infty,1}$
$(x_1, \ldots x_{n-1})$

Bemerkungen Theorem 3.10

- Beschreibung der Zellen durch Quantorenfreie Ausdrücke:

  Induktiv!
- Intervalle! Funktionsbereiche:
  $f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) < y < f_{i+1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ oder
  $y = f_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$
- A) Laufzeit: Polynomiell in Grad der Polynome!
- B) Laufzeit: Doppelt-Exponentiell in Dim. n
- Rekursiv Einteilung nach Anzahl Nullstellen
- $\mathcal{K}_1$: Grad k_1, k_1 Nullstellen, $2k_1 + 1$ Zellen
- Grad und Nullstellen: k_i, $i = 1, \ldots, n$
- $(2k_1 + 1) \times (2k_2 + 1) \times \cdots (2k_n + 1)$
- $O(2^n k^n)$!!!

Polynomielle Bedingungen für feste Anzahl reellw. Nullstellen

- Bsp.: $P_X(Y) = (X^2 - 1) + Y^2$, durch $(X^2 - 1)$
- Allg. $P(X_1, \ldots, X_n) := \prod_{P_i \in \mathcal{P}} P_i$
- $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ festes Tupel
- $\hat{P}(X_n) := P_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(X_n)$
- $r := \mathrm{grad}_{X_n}(\hat{P}(X_n))$ Grad Variable X_n
- Anzahl versch. reellw. Nullst. in $\hat{P}(X_n)$
- $r - \mathrm{grad}_{X_n}\left(\mathrm{ggT}\left(\hat{P}(X_n), \underbrace{\hat{P}'(X_n)}_{\text{Ableitung nach } X_n}\right)\right)$

Anzahl versch. reellw. Nullst.: $\hat{P}(X_n)$

$$r - \mathrm{grad}_{X_n}\left(\mathrm{ggT}\left(\hat{P}(X_n), \underbrace{\hat{P}'(X_n)}_{\text{Ableitung nach } X_n}\right)\right)$$

- α k–fache Nullst. von $f(x)$
- $f(x) = (x-\alpha)^k \cdot g(x)$, $g(\alpha) \neq 0$
- $f'(x) = k(x-\alpha)^{k-1} \cdot g(x) + (x-\alpha)^k \cdot g'(x)$
- α ist $(k-1)$–fache Nullst. v. $f'(x)$
- Sei $f(x) = b \prod_{i=1}^{j} (x-\alpha_i)^{k_i}$
- $\mathrm{ggT}(f(x), f'(x)) = b \prod_{i=1}^{j} (x-\alpha_i)^{k_i-1}$
- Behauptung: $j = \sum_{i=1}^{j}(k_i) - \sum_{i=1}^{j}(k_i - 1) = r - \mathrm{grad}(\mathrm{ggT})$

Anzahl versch. reellw. Nullst.: $\hat{P}(X_n)$

- Polynomielle Beding. aufstellen: $\operatorname{grad}_{X_n}(\hat{P}(X_n))$ und $\operatorname{grad}_{X_n}\left(\operatorname{ggT}\left(\hat{P}(X_n), \hat{P}'(X_n)\right)\right)$ sind konstant
- Beispiel: $P(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 - 1$
- $P_{(X,Y)}(Z) = Z^2 + (X^2 + Y^2 - 1)$, Grad 2, $P'_{(X,Y)}(Z) = 2Z$
- Gemeinsame Nullstellen von $P_{(X,Y)}(Z)$ und $P'_{(X,Y)}(Z)$?
- 0 falls $(X^2 + Y^2 - 1) \neq 0$, 1 falls $(X^2 + Y^2 - 1) = 0$
- $\operatorname{grad}_Z\left(\operatorname{ggT}\left(P_{(X,Y)}(Z), P'_{(X,Y)}(Z)\right)\right)$ konstant falls Vorz. $X^2 + Y^2 - 1$ konstant
- Auch Allgemein mit Resultanten: Evtl. später!

Kap. 3.4: Anwendung auf die Bahnplanung

Theorem 3.11: Das Problem der Bewegungsplanung für allgemeine Systeme ist effektiv berechenbar!

- C_{frei} als semialgebraische Menge
- Entscheidungsproblem: Start- und Endkonfiguration
- Existiert kollisionsfreier Weg
- Berechne den Pfad
- Algorithmus existiert
- In endlicher Zeit Antwort der Machine