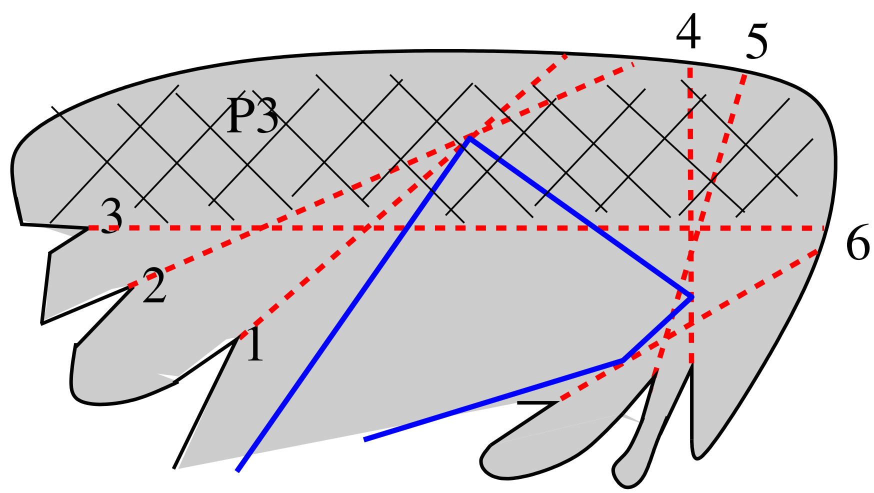
Offline Bewegungsplanung: SWR und Touring

Elmar Langetepe
University of Bonn

SWR (Allgemeiner Fall)

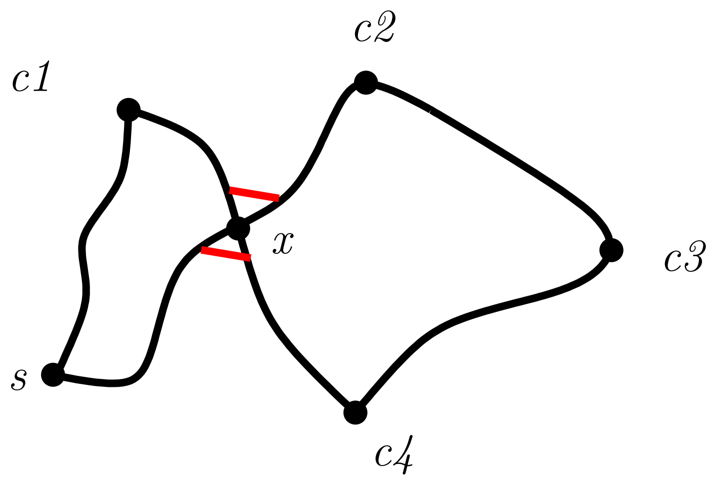
- Corner Problem!!
- Def. 1.28 Folge wes. Cuts, die sich sukzessive schneiden
- Müssen nicht gemäß Ordnung besucht werden
- Aber die zugehörigen P_{c_i}!!!



Lemma 1.29

Die SWR besucht die Corner gemäß der Ordnung entlang des Randes!

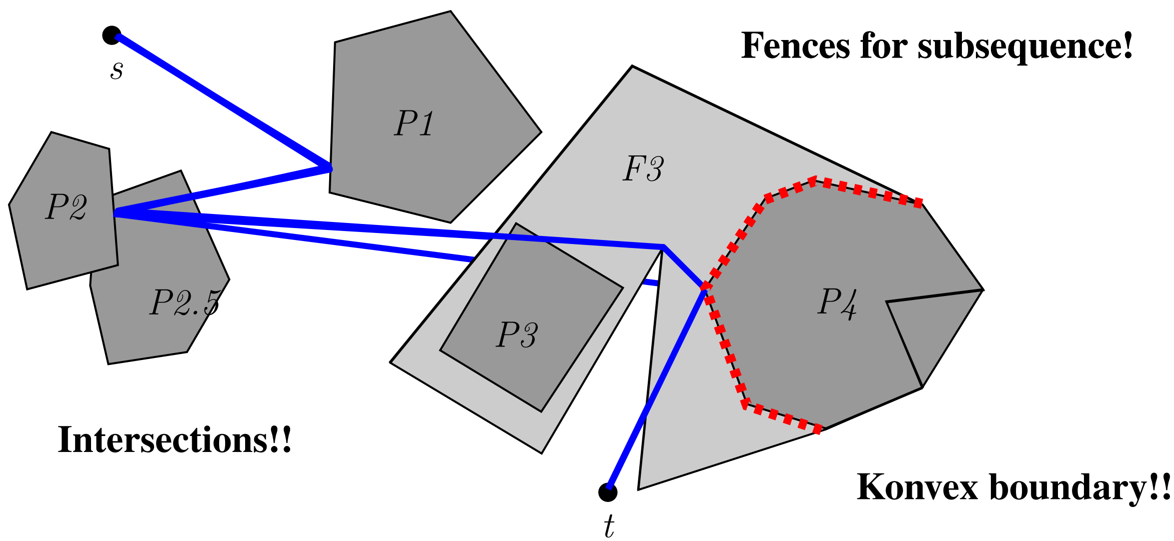
Beweis: Genauso wie Lemma 1.26! Anpassungen im Corner!



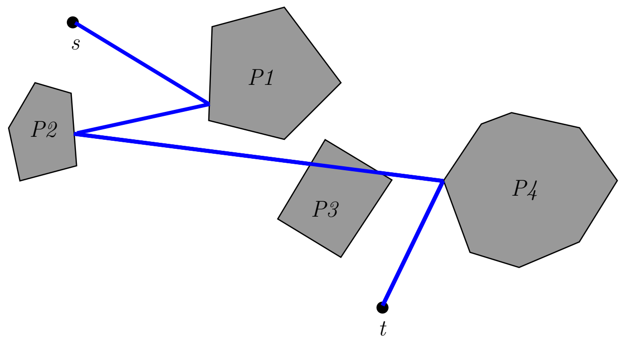
Anpassungen innerhalb der Corner: Fehleranfällig!!

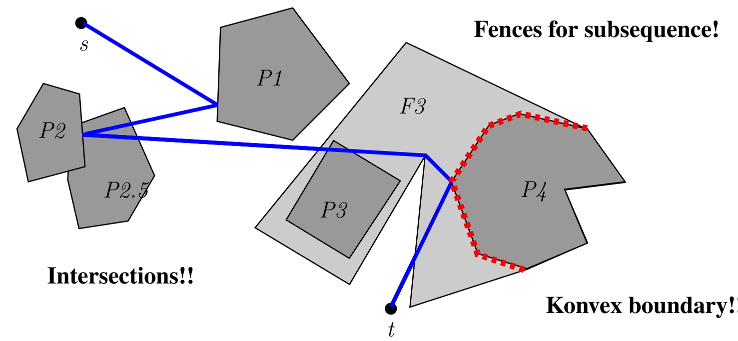
Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone
- Start s und Ziel t
- Besuche Polygone nach geg. Reihenfolge, Shortest Path



TPP





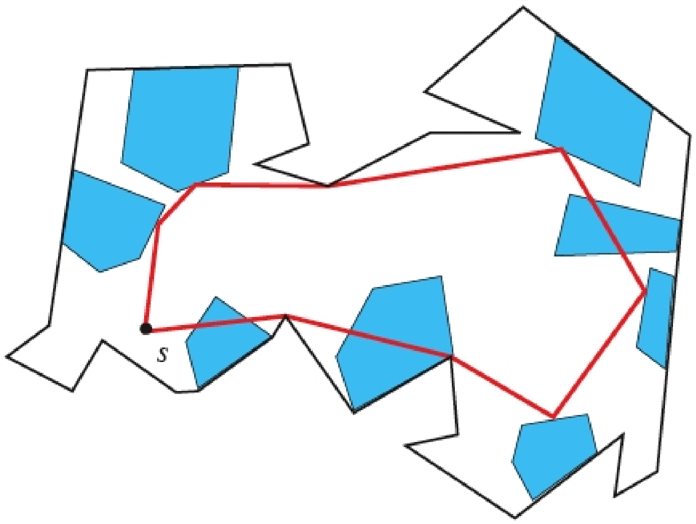
- Einfache Version:
- $O(nk \log \frac{n}{k})$
- Build(Query): $O(nk \log \frac{n}{k})$
- Kompl.: $O(n)$
- Query (festes s): $O(k \log \frac{n}{k})$

- Allgemeine Version:
- Zäune, Rand konvex, etc.
- $O(nk^2 \log n)$
- Build(Query): $O(nk^2 \log n)$
- Kompl.: $O(nk)$
- Query (festes s): $O(k \log n + m)$

Ergebnisse von: Dror, Efrat, Lubiw, Mitchell 2003!!

Anwendung: Safari-Problem

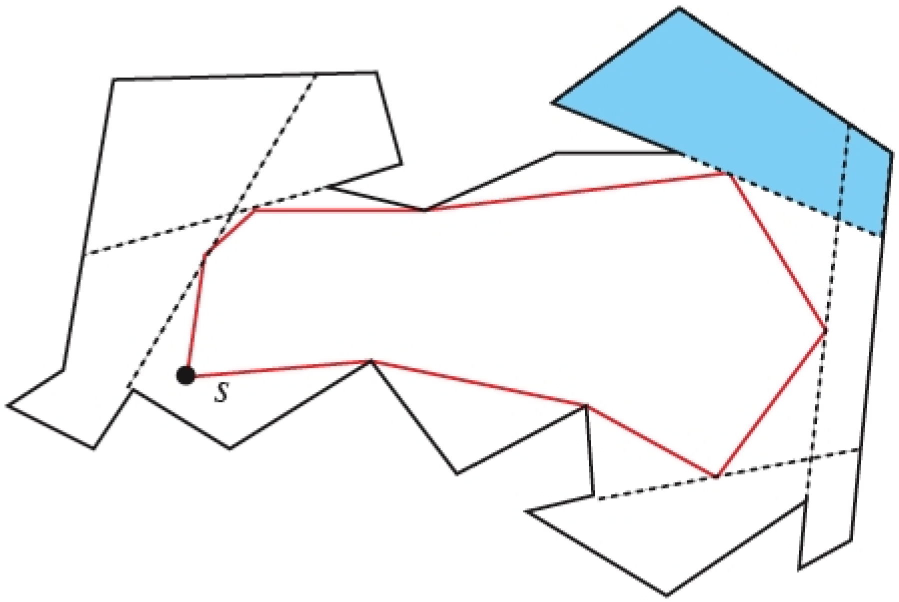
Kürzester Weg,
innerhalb eines Polygones, der eine Menge von schnittfreien Polygonen besucht.



- $O(n^2)$ '92
- $O(n^3)$ '94
- $O(n^3)$ Tan Hirata '01
- $O(n^2 \log n)$ jetzt! Anpassen!!

Ordnung entlang des Randes!

Anwendung: SWR



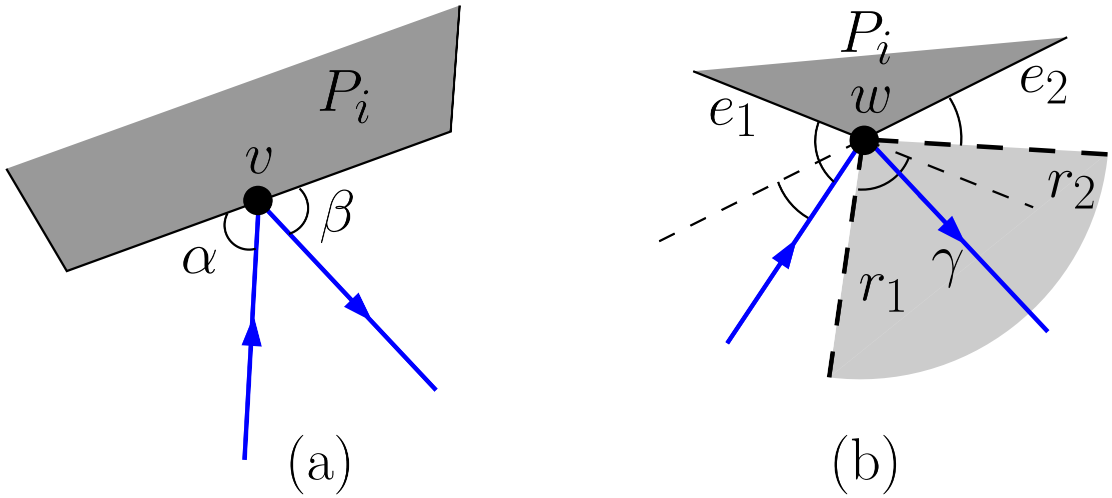
Wesentlichen Teile!

Ordnung entlang des Randes!

Ein gemeinsamer Zaun! Schnitte!

- $O(n^4)$ '91
- $O(n^4)$ Tan et al. '99
- $O(n^3 \log n)$ jetzt!

Lokale Eigenschaften: Lemma 1.31(i)

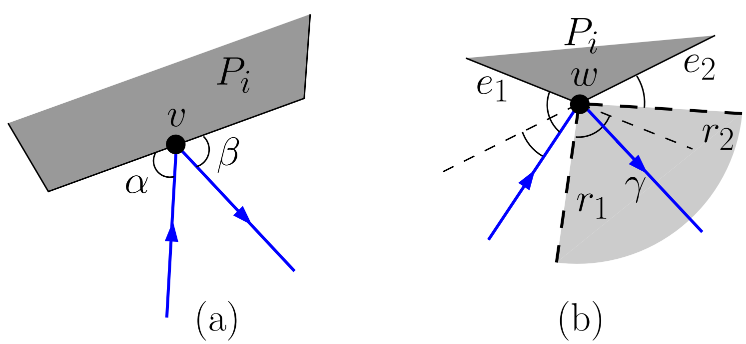


- (a) Reflektion an Kante e: $\alpha = \beta$
- (b) Reflektion an Knoten w: Innerhalb Winkelbereich γ
- Sonst nicht optimal
- Lemma 1.31: Local optimality $\Rightarrow$ Global optimality
- Aufgabe: Berechne sukzessive lokal optimalen Pfad

Lemma 1.31 (ii) und (iii)

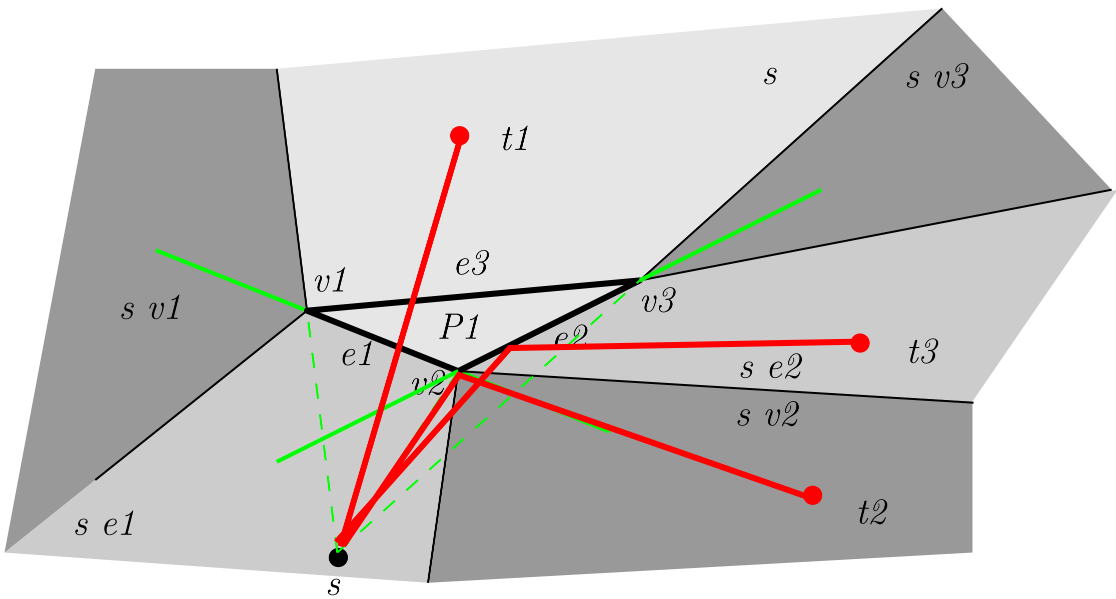
- Bezeichnung $\pi_i(p)$: lokal opt. Weg von s über $P_1, \ldots, P_i$ bis p
- Lokal optimal: Erfüllt überall die Bedingungen (a) oder (b)
- Über Ecken und Kanten, lokal nicht verkürzbar
- (ii): $\pi_i(p)$ ist stets eindeutig! (Konstruktiv!)
- (iii): $\pi_i(p)$ ist auch global optimal!

Beweis (iii): Jeder global optimale Weg muss lokal optimal sein!

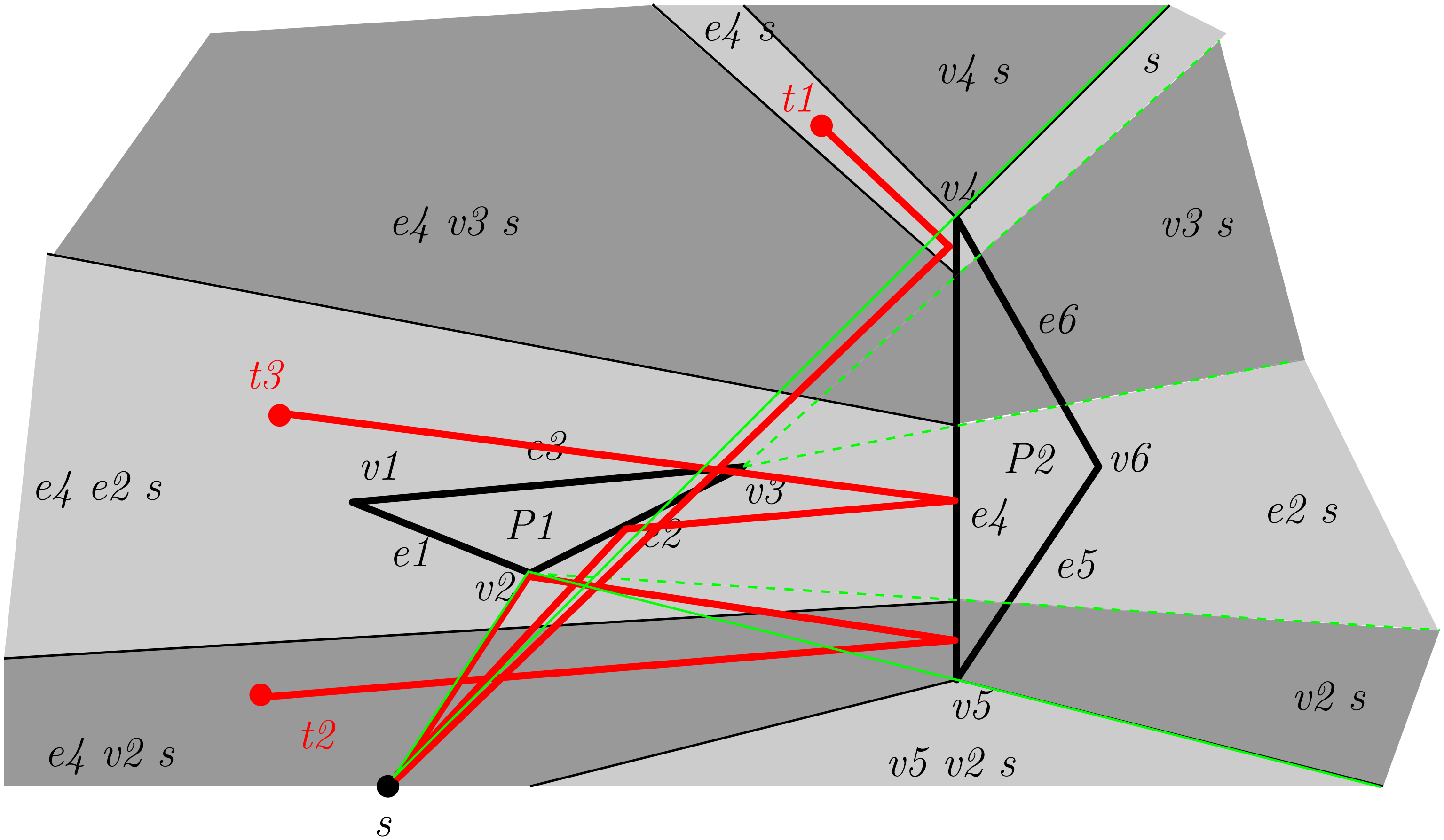


Full comb. shortest path map: Beispiel

- Fixiere den Startpunkt s
- Teile die Ebene in Regionen ein:
- *Kombinatorisch* gleiche Kürzeste Wege

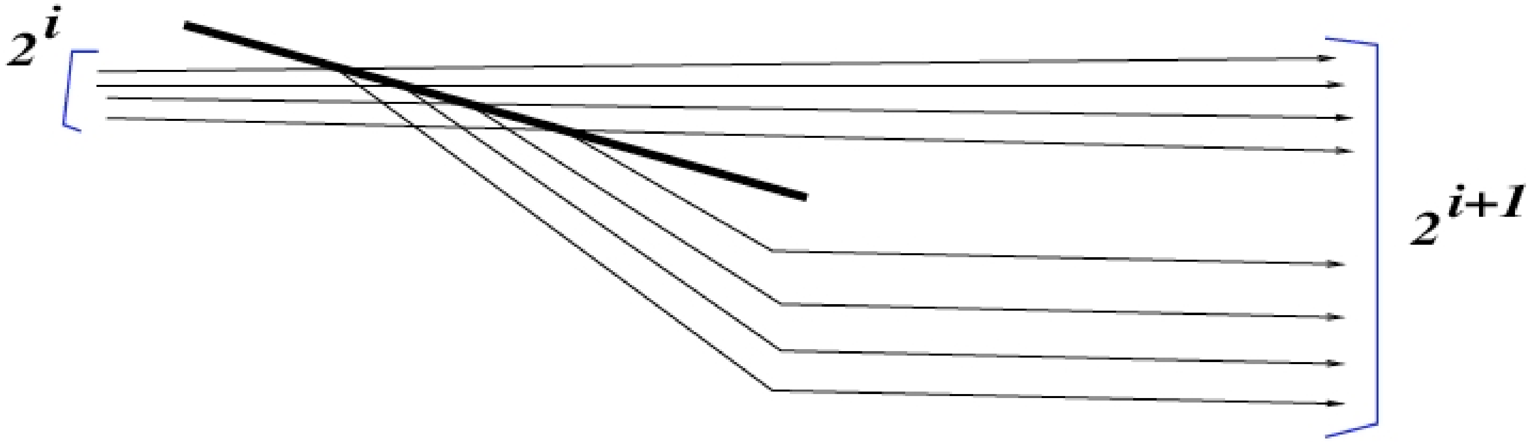


Full comb. shortest path map: Zwei Polygone



Komplexität der FC SPM

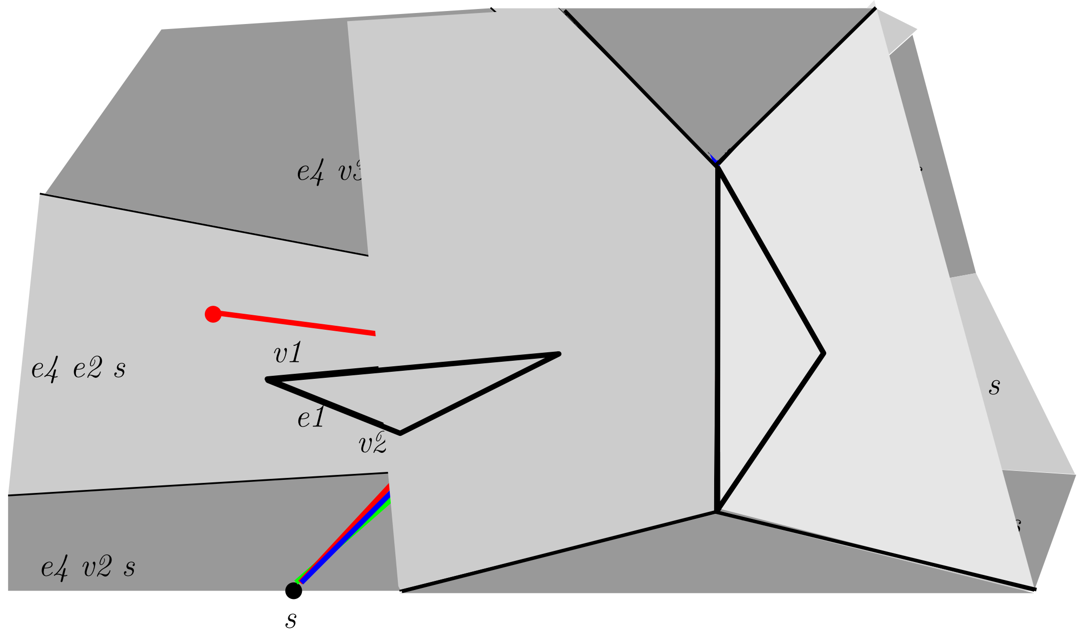
Anzahl der Kanten: Verdoppeln für jedes Polygon!



Mehr als $\Omega((n-k)2^k)$ Kanten! Zu viele!

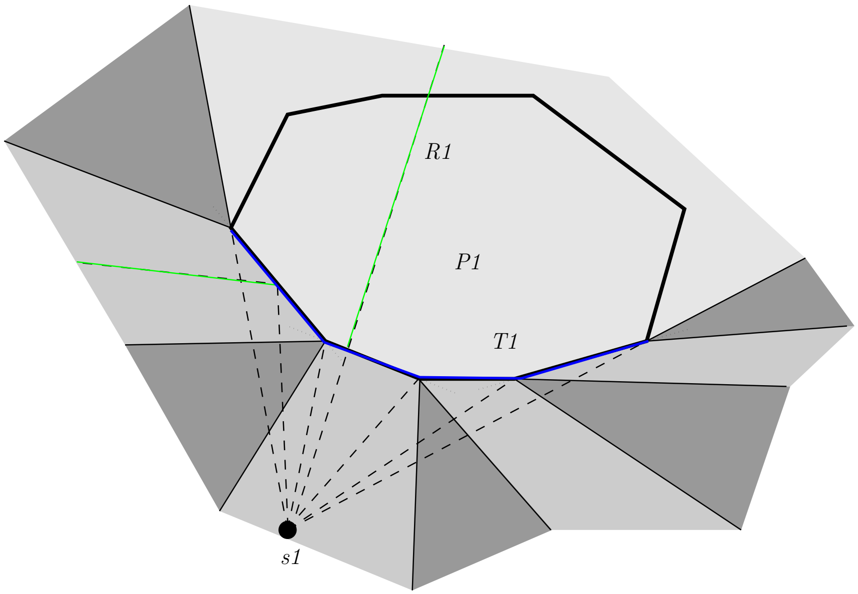
Last step shortest path map

- Der letzte Schritt des Kürzesten Weges
- Einfacher Teil der vollen SPM!
- Durchgang, Reflektion, Kante/Knoten



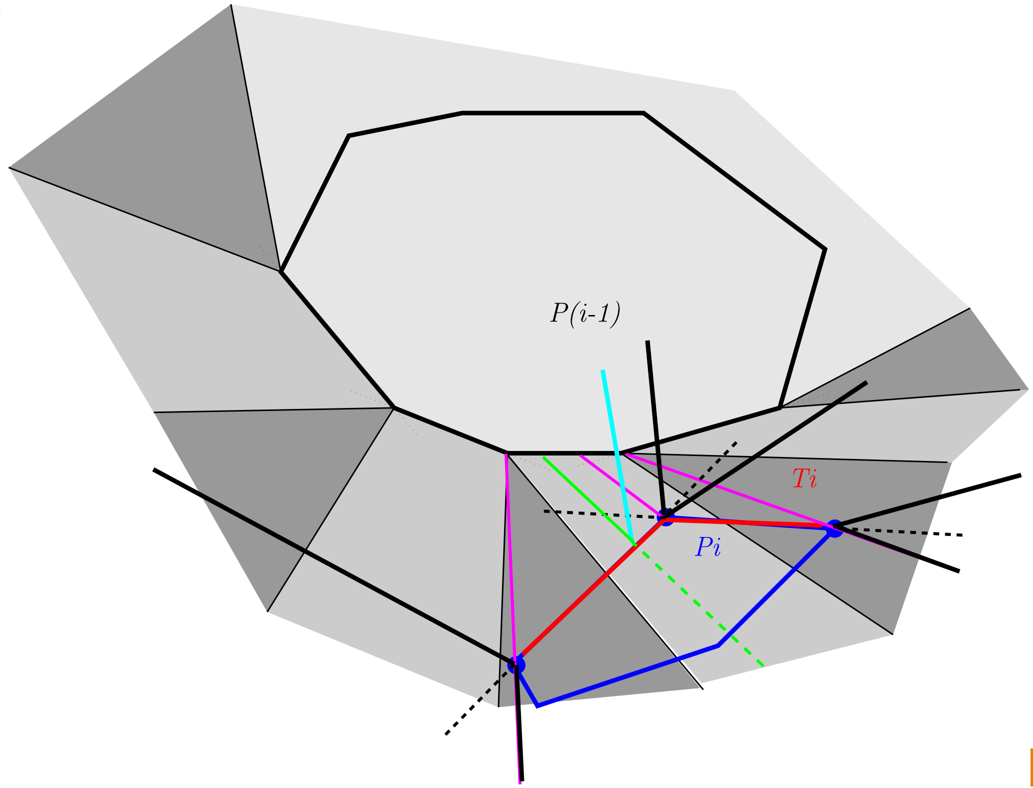
Last Step SPM $S_1, S_2, \ldots, S_k$

- S_i gehört zur Sequenz $P_1, P_2, \ldots, P_i$
- Beschaffenheit S_i: Reflektionsbereich T_i (konvexe Kette)
- Ausgehende Strahlen: Stern R_i, disjunkt
- Jeder Punkt wird von genau einem Strahl getroffen
- Komplexität: $O(|P_i|)$



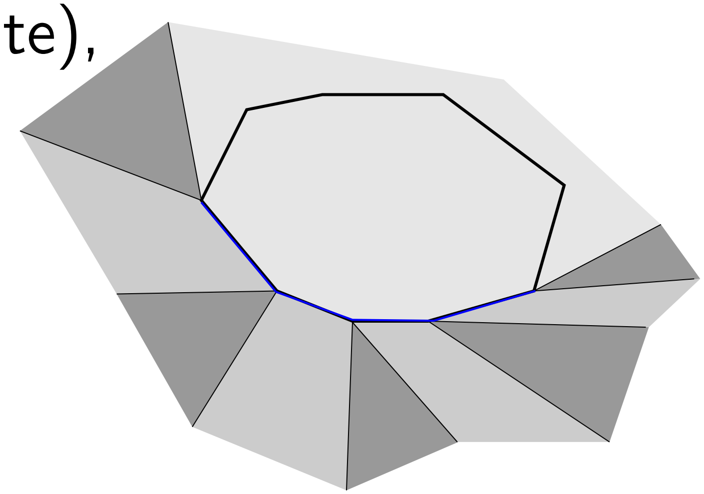
Lemma 1.32: Beweis!

- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i, Disjunkter Stern R_i
- Gilt für S_1
- Annahme: Gilt für $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$
- Lege konvexes Polygon P_i in S_{i-1}
- *Sichtbare* Eckpunkte konvexer Kette von disjunkten Strahlen getroffen
- Reflektionen disjunkt



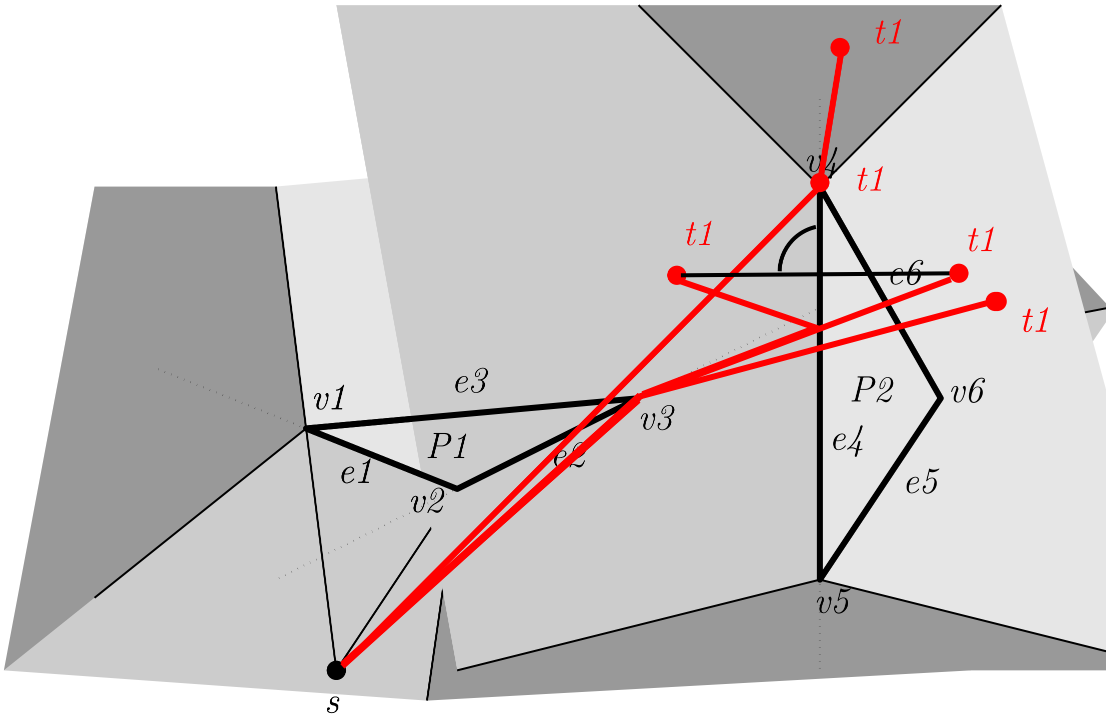
DS und Komplexität für S_i!

- Vorbereitet für Lokalisation
- Reflektionsbereich(Knoten/Kante), Durchgangsbereich
- Konvexe Kette, n_i disjunkte Strahlen
- Balancierter Baum: Lokalization in $O(\log n_i)$
- Für alle S_i gleich



Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}

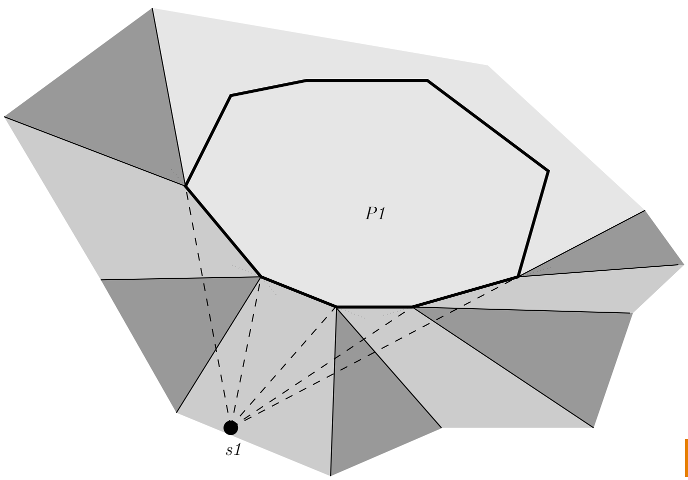


Analyse der Query! Lemma 1.33

- Annahme: Alle Last Step SPM sind gegeben
- $$\sum_{i=1}^{k} \log n_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$
- Worst-Case:
$$n_i = \frac{n}{k}$$
- Alles zusammen:
$$O(k \log \frac{n}{k})$$

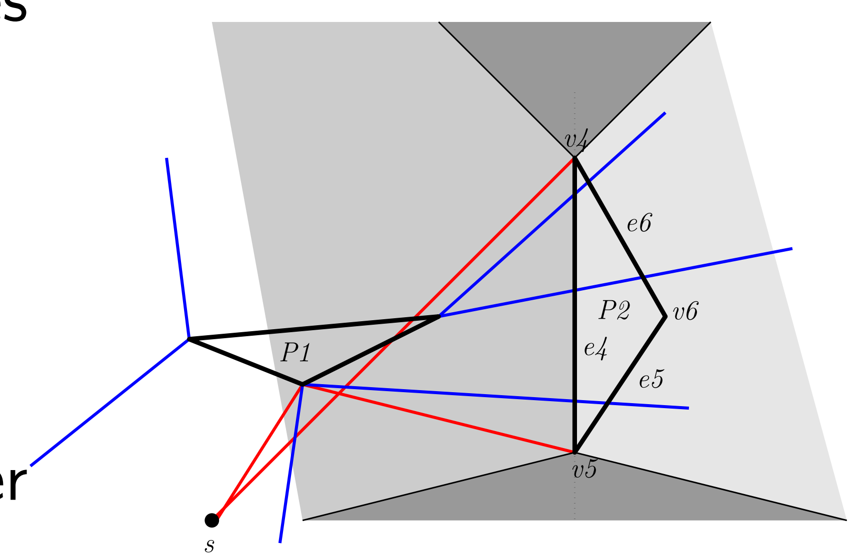
Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- Queries: Backward
- Berechnung: Forward
- SPM für P_1
- Sichtbare konvexe Kette/Baum der Strahlen: $O(n_1)$
- Disjunkte Reflektionen!!



Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- SPM von P_i aus SPM of $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Letztes Segment des Kürzesten Weges von s zu Knoten von P_i
- Query: Nutze SPM $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Laufzeit: $O\left(n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1}\right)$ mit $N_j := \sum_{l=1}^{j} n_l$
- Sichtbare konvexe Kette/Baum der Strahlen
- Disjunkt wegen konvexer Kette!!



Analyse Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Theorem 1.34

Rekursiv: P_2,. . . ,P_k

Gesamtlaufzeit:

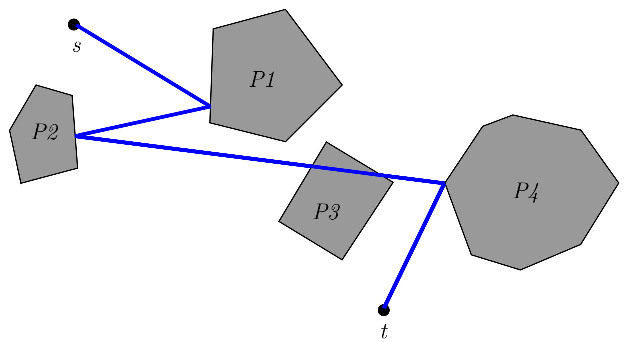
$$\sum_{i=2}^{k} n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1}$$

$$n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1} \;\leq\; n_i k \log\frac{n}{k}$$

Gesamtlaufzeit:

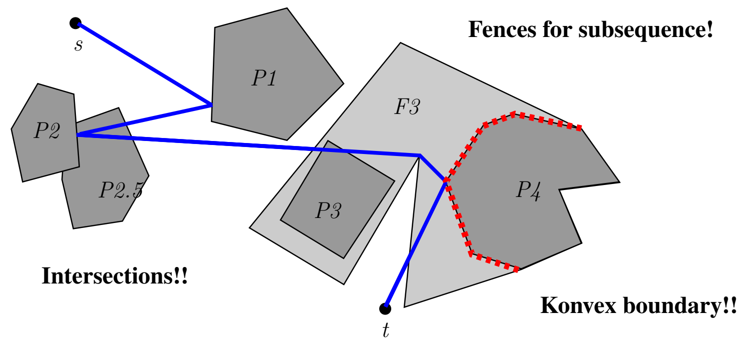
$$O\left(kn\log\frac{n}{k}\right)!$$

Zusammenfassung!!



- Einfache Version:
- Disjunkte, konvexe Polygone, keine Zäune
- $O(nk \log \frac{n}{k})$
- Build(Query): $O(nk \log \frac{n}{k})$
- Komplexität: $O(n)$
- Query (festes s): $O(k \log \frac{n}{k})$
- Theorem 1.34

Erweiterung!



- Komplexe Version:
- Nicht-disjunkte, konvexe Polygone, Zäune
- $O(nk^2 \log n)$ insgesamt
- Build(Query): $O(nk^2 \log n)$
- Komplexität: $O(kn)$
- Query (festes s): $O(kn)$

- Lemma 1.35: Reflexionsbereich ist Baum
- Theorem 1.36/Theorem 1.37