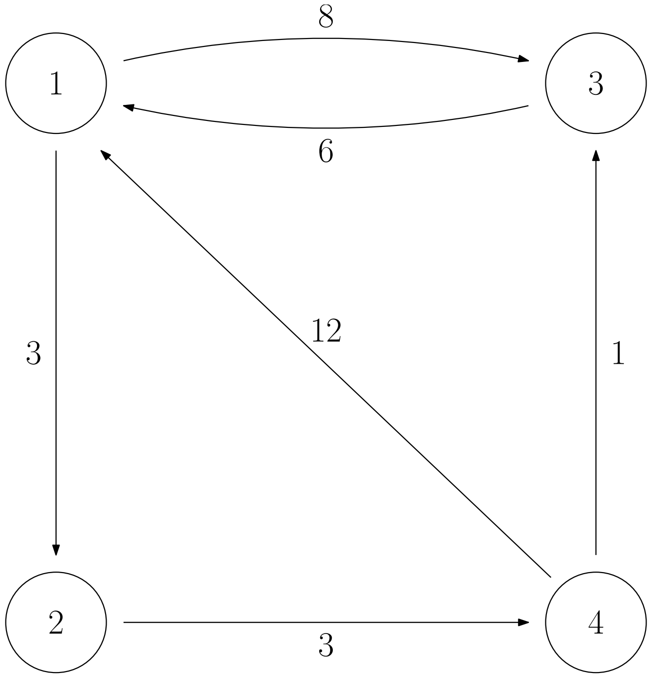
PD Dr. Elmar Langetepe
David Kübel
Institut für Informatik

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1: (8 Punkte)

Wenden Sie auf dem nachfolgend abgebildeten gerichteten Graphen den Algorithmus von Floyd und Warshall an, um das Alle-Paare-kürzeste-Wege-Problem zu lösen. Geben Sie dabei alle Zwischenergebnisse an, d.h. erstellen Sie für alle Werte von k eine Tabelle, aus der die aktuellen Distanzwerte und Vorgängerknoten hervorgehen.

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass sich nach der Initialisierung in jeder folgenden Iteration maximal 6 Tabellenzellen verändern können!



Aufgabe 12.2: (6 Punkte)

Arbitrage bezeichnet das Ausnutzen von Preisunterschieden für gleiche Waren auf verschiedenen Märkten. Ein einfaches Beispiel ist das Ausnutzen von Wechselkursen, also das Handeln mit Währungen. Angenommen, ein Händler startet mit 1\$ (Dollar). Damit kauft er zunächst 95.739¥ (Yen). Pro Yen erhält er 0.0063£ (britische Pfund). Schließlich kauft er zum Kurs 1.6583\$/£ wieder Dollar und hat jetzt $95.739 \cdot 0.0063 \cdot 1.6583 = 1.0002131$ Dollar (Wechselkurse vom 02.06.2009). Insgesamt ergab sich also ein Gewinn von 0.021%.

Gegeben seien n Währungen $c_1, \ldots, c_n$ und eine $(n \times n)$-Matrix R, die die aktuellen Wechselkurse enthält. Die Einträge von R sind positiv und auf der Hauptdiagonalen stehen Einsen. Geben Sie einen Algorithmus an, der für eine Wechselkursmatrix R in Zeit $O(n^k)$ bestimmt, ob ein Arbitrage-Geschäft möglich ist. Dabei soll k eine geeignete Konstante sein.

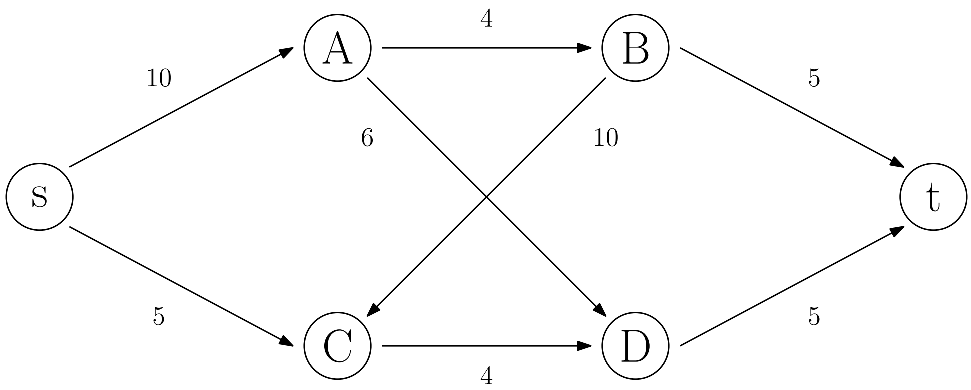
Aufgabe 12.3: (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde festgelegt, dass in einem Flussnetzwerk $G = (V, E)$ für kein Knotenpaar $u, v \in V$ die beiden Kanten (u, v) und (v, u) in E enthalten sein dürfen.

Geben Sie eine Konstruktion an, mittels derer man jedes Flussnetzwerk, das diese Forderung verletzt, in ein äquivalentes Netzwerk $G' = (V', E')$ umwandelt, das keine entgegengesetzten Kanten enthält. Geben Sie dabei auch an, wie ein Fluss f in G umgelenkt wird, damit das Resultat f' in G' ebenfalls ein gültiger Fluss mit $|f'| = |f|$ ist.

Aufgabe 12.4: (6 Punkte)

Wenden Sie den Algorithmus von Ford und Fulkerson, wie er in der Vorlesung vorgestellt wurde, auf das nachfolgend abgebildete Flussnetzwerk an.



Aufgabe 12.5: (6 Zusatzpunkte)

Gegeben sei eine Tabelle der Fußball-Bundesliga, die den Punktestand zu einem bestimmten Zeitpunkt wiedergibt, sowie eine Liste der noch ausstehenden Spiele. Wir betrachten die alte Zweipunkteregel, d.h. die siegreiche Mannschaft erhält zwei Punkte und der Verlierer keinen; bei einem Unentschieden erhält jede Mannschaft einen Punkt.

Das *Meisterschaftsproblem* besteht nun darin zu entscheiden, ob eine gegebene Mannschaft noch Meister werden kann. Dazu muss sie in der Gesamtwertung die meisten Punkte haben. Gibt es mehrere Mannschaften mit derselben Punktzahl, dann muss sie unter diesen das beste Torverhältnis haben. Wir gehen davon aus, dass die gegebene Mannschaft noch mindestens ein Spiel zu bestreiten hat. Modellieren Sie das Meisterschaftsproblem als Flussproblem.

Hinweis: Sie können annehmen, dass die gegebene Mannschaft alle ausstehenden Spiele gewinnt und dabei hinreichend viele Tore schießt, sodass sie von allen Mannschaften das beste Torverhältnis hat. So kann man berechnen, wie viele Punkte sie noch erreichen kann, und es ist klar, wie viele Punkte jede der anderen Mannschaften höchstens noch bekommen darf. Es müssen also nur die Spiele betrachtet werden, an denen die Mannschaft nicht beteiligt ist. Die Frage ist demnach, ob die restlichen Spiele alle so ausgehen können, dass keine Mannschaft mehr als diese Punktzahl erreicht.