Abgabe: 23.01.2018, 12.00 Uhr
Besprechung: KW 5

PD Dr. Elmar Langetepe
David Kübel
Institut für Informatik

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1: (3+3 Punkte)

Geben Sie ein möglichst kleines Beispiel für ein Flussnetzwerk an, sodass:

(a) der Algorithmus von Ford und Fulkerson zur Berechnung eines maximalen Flusses mindestens eine Iteration mehr als der Algorithmus von Edmonds und Karp benötigt - zeigen Sie dies auch an Ihrem Beispiel;

(b) der Algorithmus von Edmonds und Karp mindestens eine Kante ins Restenetzwerk einfügt, löscht und ein zweites Mal einfügt.

Aufgabe 13.2: (4 Punkte)

Lösen Sie das folgende lineare Programm graphisch für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$\max 2x_1 - x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 10 & \qquad x_1 - x_2 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 10 & -x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 15 & x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 13.3: (4+4 Punkte)

Ein Schokoladenfabrikant möchte den Standort wechseln. Deshalb soll der vorhandene Restlagerbestand an Rohstoffen aufgebraucht werden. Die Zutaten für die Schokolade sind Kakaobutter, Kakaomasse, Zucker und Milchpulver. Es werden vier Sorten produziert: Dunkel-, Zartbitter-, Vollmilch- und Kinderschokolade. Die Zusammensetzung und der Verkaufserlös einer 100g-Tafel ist bei den einzelnen Sorten wie folgt:

	Dunkel-	Zartherb-	Vollmilch-	Kinderschokolade
Kakaobutter	10g	13g	15g	20g
Kakaomasse	45g	30g	20g	10g
Zucker	45g	47g	50g	50g
Milchpulver	0g	10g	15g	20g
Erlös	10g	13g	15g	20g

Der Fabrikant hat noch 4,31 kg Kakaobutter, 9,3 kg Kakaomasse, 15,29 kg Zucker und 3,1 kg Milchpulver zur Verfügung.

(a) Angenommen die Rohstoffe sollen komplett aufgebraucht werden. Formulieren Sie für das Problem ein lineares Programm in *Gleichungsform*.

(b) Nehmen Sie an, dass die Rohstoffe nicht komplett aufgebraucht werden müssen, dafür jedoch der Verkaufserlös maximiert werden soll. Formulieren Sie hierfür ein lineares Programm in *kanonischer Form*.

Aufgabe 13.4: (4+2 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Lineare Programm:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 5x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & & \\
\\
\text{u.d.N.} & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & -x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & & & x_1, & x_2 & ,x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

(a) Lösen Sie das o. a. LP mit der in der Vorlesung vorgestellten Simplex-Methode.

(b) Verwenden Sie einen LP-Solver Ihrer Wahl und verifizieren Sie damit ihre Lösung.

Aufgabe 13.5: (2+2+2 Zusatzpunkte)

(a) Wandeln Sie das Optimierungsproblem

$$
\begin{aligned}
&\min \max \{c_1 \cdot x, \dots, c_k \cdot x\} \\
&Ax \leq b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

in ein äquivalentes lineares Programm um.

(b) Ein *Integer Linear Program* (ILP) ist ein lineares Programm, in dem alle Variablen nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen. Die Koeffizienten in der Zielfunktion und in den Nebenbedingungen können weiterhin reell sein.

Formulieren Sie das Wechselgeldproblem mit einem Münzsystem $M = \{c_1, \dots, c_k\}$ aus der Vorlesung als ILP.

(c) In einer Fabrik werden zwei Chemikalien A und B hergestellt. Dafür gibt es zwei verschiedene Prozesse 1 und 2, die beide eine Grundsubstanz X benötigen. Prozess 1 dauert 2 Stunden, benötigt 100 ml der Substanz X und liefert 2 ml von Chemikalie A sowie 1 ml von Chemikalie B. Prozess 2 dauert 3 Stunden, benötigt 200 ml der Substanz X und liefert 3 ml von Chemikalie A sowie 2 ml von Chemikalie B. Insgesamt stehen 60 Arbeitsstunden und 4 l der Substanz X zur Verfügung. Der Gewinn beim Verkauf von Chemikalie A liegt bei 16 Euro pro Milliliter und bei Chemikalie B bei 14 Euro pro Milliliter. Ziel ist es, den Gewinn zu maximieren.

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm (LP). Beschreiben Sie die Bedeutung der Variablen, die Sie in Ihrem LP benutzen.