

9) 12 ist keine Primzahl

$\hat{=}$  nicht

12 ist eine Primzahl

Elementaraussagen

10) Ich werde dort sein oder auch nicht

$\hat{=}$

ich werde dort sein

oder

ich werde nicht dort sein

Hier geht eine Nebenbedeutung verloren: "Ich muß mich in dieser Frage nicht festlegen"

11)

11) Sie trat näher und staunte

$\hat{=}$

sie trat näher

und

sie staunte

Elementaraussagen

Man sieht: Elementaraussagen lassen sich mit Hilfe der logischen Junktoren "und", "oder", "nicht", "wenn...dann" zu komplexeren Aussagen zusammensetzen

• In der Aussagenlogik interessiert man sich für die Wahrheitswerte der zusammengesetzten Aussagen.

• Auf die Beschaffenheit der Elementaraussagen kommt es dabei nicht an.

In der Tat: Die beiden zusammengesetzten Aussagen

12) wenn <sup>früher =</sup> morgen Donnerstag ist, dann gehe ich in die LUDS - Vorlesung

13) wenn du 4 Meter hoch springst, dann freij ich einen Besen

sind aus logischer Sicht beide vom Typ

wenn Elementaransage 1 dann Elementaransage 2,

und es kommt nicht auf die Bedeutung der Elementaransagen an, sondern nur auf ihre Wahrheitswerte.

Zugegeben: Beim Blick durch die Brille des Aussagenlogikers können Nebenbedeutungen verloren gehen, die in der Alltagssprache vorhanden sind:

Beispiele: 10) siehe oben

13) besagt eigentlich

"ich glaube nicht, daß du 4 Meter hoch springen kannst"

Wie man solche Konnotationen in der Sprache erkennt und formalisiert, ist nicht klar.

Dennoch: Wir behandeln ab jetzt Elementaransagen einfach wie logische (= Boolesche) Variablen, die die beiden Werte "wahr" oder "falsch" haben können.

→ Zusammenhang zu "0" oder "1" in elektronischen Schaltungen (durch Spannungen realisiert).

Weil wir jetzt zusammengesetzte logische Aussagen analysieren wollen, formalisieren wir sie nicht in unserer Alltagssprache, sondern mit eigenen Symbolen. Zuvächst wird dabei nur von Zeichenreihen die Rede sein, die noch keinerlei Bedeutung tragen.

Definition Sei  $\Pi = \{p, q, r, \dots\}$  eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Boole'schen Variablen.

Dann ist die Menge  $AL(\Pi)$  der aussagenlogischen Ausdrücke mit Variablen in  $\Pi$  folgendermaßen definiert:

- jedes  $p \in \Pi$  gehört zu  $AL(\Pi)$
- gehört  $\alpha$  zu  $AL(\Pi)$ , so auch  $\neg \alpha$
- gehören  $\alpha$  und  $\beta$  zu  $AL(\Pi)$ , so auch  $(\alpha \vee \beta)$
- sonst gehört nichts zu  $AL(\Pi)$ . Definition

Bemerkung  $AL(\Pi)$  ist also die kleinste Menge von Wörtern endlicher Länge über dem Alphabet

$$\Pi \cup \{ \neg, \vee, (, ) \},$$

die gegen die Bildung neuer Wörter mit  $\neg$  und  $(\dots \vee \dots)$  abgeschlossen ist.

Beispiel Sei  $M = \{p, q\}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \neg \neg \neg p, \neg(p \vee \neg q) \vee q, \neg((q \vee q) \vee ((q \vee q) \vee q)) &\in AL(\Pi) \\ pp, \neg((p \vee q)), p \vee r &\notin AL(\Pi) \end{aligned}$$

Schreibweise  $\alpha \equiv \beta$  bedeutet:  $\alpha$  und  $\beta$  stimmen Zeichen für Zeichen überein

Wie beim Beweis von Theorem 14 auf S. 124 ergibt sich sofort:

Lemma 22:  $AL(\Pi)$  ist abzählbar unendlich.

Lemma 22

Die Definition von  $AL(\Pi)$  auf S. 131 erlaubt es uns, Beweise (bzw. Definitionen) induktiv (bzw. rekursiv) über den Aufbau der Ausdrücke in  $AL(\Pi)$  zu führen.

Dabei wird folgendes Induktionsprinzip verwendet:

Sei  $E(x)$  eine Eigenschaft von Ausdrücken  $x$ .

Gilt dann

(i)  $\forall p \in \Pi : E(p)$

(ii)  $\forall \alpha : (E(\alpha) \Rightarrow E(\neg \alpha))$

(iii)  $\forall \alpha, \beta : (E(\alpha) \text{ und } E(\beta) \Rightarrow E((\alpha \vee \beta)))$ ,

so gilt für alle  $\alpha \in AL(\Pi)$ :  $E(\alpha)$ .

Skeptiker finden auf S. 132.1 eine Begründung, warum dieses induktives Prinzip erlaubt ist

Als Beispiel definieren wir induktiv die Menge  $\Pi_\alpha$  aller in  $\alpha$  vorkommenden Variablen aus  $\Pi$ :

falls  $\alpha \equiv p \in \Pi$ , dann setze  $\Pi_\alpha := \{p\}$

falls  $\alpha \equiv \neg \beta$ , dann setze  $\Pi_\alpha := \Pi_\beta$

falls  $\alpha \equiv (\beta \vee \gamma)$ , dann setze  $\Pi_\alpha := \Pi_\beta \cup \Pi_\gamma$ .

(Die Klammern stellen sicher, daß man  $\alpha$  nur auf eine Weise (als  $(\beta \vee \gamma)$ ) schreiben kann. D.h.,  $(\beta \vee \gamma) \equiv (\beta' \vee \gamma')$  impliziert  $\beta \equiv \beta'$  und  $\gamma \equiv \gamma'$ .)

Für Skeptiker:

Die Induktion über den Aufbau von Ausdrücken läßt sich auf die "gewöhnliche" vollständige Induktion über  $n \in \mathbb{N}$  zurückführen.

Dazu sei für einen Ausdruck  $\alpha$

$$\begin{aligned} L(\alpha) &:= \text{Länge von } \alpha \\ &= \text{Anzahl der Zeichen aus } \overline{\Pi \cup \{\tau, \vee, (\, , )\}}, \\ &\text{aus denen } \alpha \text{ besteht.} \end{aligned}$$

→ S. 98

Wir zeigen durch starke Induktion folgende Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall \alpha \left( L(\alpha) = n \Rightarrow E(\alpha) \right)$$

Induktionsanfang Sei  $n = 1$  und  $L(\alpha) = 1$

$$\Rightarrow \alpha \equiv p \in \Pi \xRightarrow[\substack{(i), \\ \text{S. 132}}]{\Rightarrow} E(p).$$

Induktionsschritt Gelte für alle  $n \leq u$ :

$$\forall \beta \cdot \left( L(\beta) = n \Rightarrow E(\beta) \right).$$

Sei  $\alpha$  ein Ausdruck mit  $L(\alpha) = u + 1$

$$\Rightarrow \alpha \equiv \neg \beta \quad \text{oder} \quad \alpha \equiv (\beta \vee \gamma)$$

Def AL( $\Pi$ )

$$\text{falls } \alpha \equiv \neg \beta : \Rightarrow L(\beta) = u \xRightarrow{\text{Ind. Var.}} E(\beta) \xRightarrow[\substack{(ii) \\ \text{S. 132}}]{\Rightarrow} E(\neg \beta)$$

$$\text{falls } \alpha \equiv (\beta \vee \gamma) \Rightarrow L(\beta), L(\gamma) \leq u - 2$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ \text{3 Zeichen} \end{array} \Rightarrow E(\beta) \text{ und } E(\gamma) \xRightarrow[\substack{(iii) \\ \text{S. 132}}]{\Rightarrow} E((\beta \vee \gamma)).$$

□

Als Abkürzungen führen wir ein:

$$\begin{aligned}
 (\alpha \wedge \beta) &::= \neg (\neg \alpha \vee \neg \beta) \\
 (\alpha \rightarrow \beta) &::= (\neg \alpha \vee \beta) \\
 (\alpha \leftrightarrow \beta) &::= ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))
 \end{aligned}$$

Bitte: das sind noch reine Zeichenreihen ohne inhaltliche Bedeutung!

Um Klammern zu sparen, vereinbaren wir

- $\neg$  geht vor  $\wedge, \vee$  gehen vor  $\rightarrow, \leftrightarrow$
- Außenklammern darf man fortlassen.

Bsp =  $\neg \alpha \vee \beta \equiv (\neg \alpha \vee \beta) \neq \neg (\alpha \vee \beta)$

$\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta \equiv ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \vee \delta)) \neq \alpha \vee (\beta \rightarrow \gamma) \vee \delta$

Jetzt erst fangen wir an, über Wahrheitswerte zu reden - aber nur ganz behutsam.

Die Menge  $\Pi$  besteht ja aus Variablen, die die Werte Wahr = W oder Falsch = F annehmen können.

Definition Eine Bewertung  $B$  von  $\Pi$  ist eine Abbildung

$$B: \Pi \longrightarrow \{W, F\},$$

die jeder Variablen in  $\Pi$  einen Wahrheitswert zuweist.

Weil die Ausdrücke  $\alpha \in AL(\Pi)$  "logische" Verknüpfungen von Boole'schen Variablen sind, erhalten sie jetzt auch Wahrheitswerte nach folgender Definition:

Sie setzt die Bewertung  $B$  auf  $AL(\Pi)$  fort.

Definition Sei  $\alpha \in AL(\Pi)$ .

Ist  $\alpha \equiv p \in \Pi$ , so sei  $B(\alpha) := B(p)$ .

Ist  $\alpha \equiv \neg \beta$ , so sei

$$B(\alpha) := \begin{cases} W, & \text{falls } B(\beta) = F \\ F, & \text{falls } B(\beta) = W \end{cases}$$

Ist  $\alpha \equiv (\beta \vee \delta)$ , so sei

$$B(\alpha) := \begin{cases} W, & \text{falls } B(\beta) = W \text{ oder } B(\delta) = W \\ F, & \text{falls } B(\beta) = F \text{ und } B(\delta) = F \end{cases}$$

Definition

Sie sehen die bekannten Wahrheitstafeln für "nicht" und "oder":

$\alpha$	$\neg \alpha$ "nicht"
W	F
F	W

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \vee \beta$ "oder"
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Für die Abkürzungen  $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$  ergibt sich daraus

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \wedge \beta$ "und"
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$ "wenn...dann"
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$ "genau dann...wenn"
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Beispiel

$$M = \{p, q, r\}, \quad B(p) = W, \quad B(q) = B(r) = F$$

$$\alpha \equiv \underbrace{\neg p}_F \vee \underbrace{(q \wedge \neg r)}_F \vee \underbrace{(p \wedge \neg q)}_W \quad \text{Also: } B(\alpha) = W.$$

Wenn  $B(\alpha) = F$ , so ist  $\mathbb{B}(\alpha \rightarrow \beta) = w$  —  
unabhängig von  $B(\beta)$ .

Also ist die Aussage

"Wenn Du 4m hoch springst, bin ich der Kaiser von China"  
wahr (Stabhochsprung ausgeschlossen).



Jetzt kommt die wichtigste Definition dieses Kapitels: (135)

Definition Sei  $\alpha \in AL(\Pi)$ .

(i)  $\alpha$  heißt erfüllbar, falls es eine Bewertung  $B$  von  $\Pi$  gibt mit  $B(\alpha) = w$

(ii)  $\alpha$  heißt gültig, falls für jede Bewertung  $B$  von  $\Pi$  gilt:  $B(\alpha) = w$

gültige Ausdrücke nennt man "Tautologien"

Definition

Beispiele

(i)  $\alpha \equiv p$  ist erfüllbar (wähle ein  $B$  mit  $B(p) = w$ )

$\alpha \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r$  ist erfüllbar.

(wähle ein  $B$  mit  $B(p) = B(q) = B(r) = f$ )

$\alpha \equiv p \wedge \neg p$  ist nicht erfüllbar.

(ii)  $\alpha \equiv \perp \vee \neg p$  ist gültig.

$\alpha \equiv \perp$  ist nicht gültig.

hier

$\alpha$  gültig  $\Rightarrow$   $\alpha$  erfüllbar

$\alpha$  gültig  $\Leftrightarrow \neg \alpha$  nicht erfüllbar

schnell!

Naheliegende und wichtige

Frage 1 Wie erkennt man, ob ein gegebenes  $\alpha$  gültig oder erfüllbar ist?

(man kann natürlich alle verschiedenen Belegungen ausprobieren, aber für  $|\Pi_\alpha| = n$  sind das  $2^n$  viele!)

Folgendes Beispiel zeigt, wie wenig Spaß es macht, Wahrheitstabellen durchzuprüfen:

$$\alpha \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r$$

3  
2  
Fälle

p	q	r	$\neg p \vee q$	$\neg q \vee r$	$\neg r$	$\alpha$
w	w	w	w	w	f	f
w	w	f	w	f	w	f
w	f	w	f	w	f	f
w	f	f	f	w	w	f
f	w	w	w	w	f	f
f	w	f	w	f	w	f
f	f	w	w	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

$\alpha$  ist also erfüllbar — aber nur auf die eine Art aus Beispiel (i), S. 135

insbesondere ist  $\alpha$  nicht gültig.

Die Wahrheitstafel für dieses  $\alpha$  beschreibt im Grunde eine Abbildung

$$\{w, f\}^3 \longrightarrow \{w, f\}$$

$$(\mathcal{B}(p), \mathcal{B}(q), \mathcal{B}(r)) \longmapsto \mathcal{B}(\alpha)$$

Beim Bau von Schaltkreisen kommt es darauf an, solche Boole'schen Funktionen mit möglichst wenig Aufwand zu realisieren. (hier: Wahrheitstafeln)

Offenbar hätte der Ausdruck  $\beta \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$  dieselbe Wahrheitstafel wie  $\alpha$  — er ist aber viel kürzer!

Definition: Zwei Ausdrücke  $\alpha, \beta \in AL(\Pi)$  heißen logisch äquivalent, in Zeichen:  $\alpha \equiv \beta$ , falls gilt:

$\forall$  Bewertungen  $\mathcal{B}$  von  $\Pi$ :  $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta)$ .

... natürlich: eine Äquivalenzrelation

Es stellen sich also weitere Fragen:

Frage 2 Wann gilt  $\alpha \vee \beta$ ? Was haben  $\alpha$  &  $\beta$  dann miteinander zu tun?

Frage 3 Wie kann man zu gegebenem  $\alpha$  ein möglichst kurzes  $\beta$  finden mit  $\alpha \vee \beta$ ?

Wir wollen versuchen, auf die Fragen 1 und 2 partielle Antworten zu geben.

(Zunächst notieren wir zwei offensichtliche Tatsachen

Lemma 23

- (i)  $\alpha$  gültig  $\Rightarrow \alpha$  erfüllbar
- (ii)  $\alpha$  gültig  $\Leftrightarrow \neg \alpha$  nicht erfüllbar.

(Lemma 23)

4.2 Ein Spiel mit Ausdrücken (Kalkül der Aussagenlogik)

Beim Rechnen in Gruppentheorie nur die Gruppenaxiome verwendet werden - sonst nichts.

Gruppentheoretiker akzeptieren nur solche Theoreme, die sich vollständig auf diese Axiome zurückführen lassen.

Gelht das ganz allgemein mit logischen Aussagen auch?

Was heißt eigentlich "eine Aussage herleiten"?

Wann "folgt" etwas?

Machen wir uns von (möglicherweise trügerischen) inhaltlichen Überlegungen frei, und betrachten wir folgendes Spiel mit Zeichenreihen: