Grundlagen der alg. Geometrie
Wintersemester 2018/2019

Abgabe: optional in Übungen
Besprechung: 14.11.

Dr. Herman Haverkort
Dr. Anne Driemel
Institut für Informatik

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: Amortisierte Kosten Beispiel: Binärzähler (4 Punkte)

Betrachten Sie einen Binärzähler, der in Einer-Inkrement-Zählschritten von 0 bis n hochzählt. Dabei treten pro Zählschritt unterschiedlich viele Überträge im Binärsystem auf. Ein Elementarschritt sei definiert als die Umschaltung genau eines Bits ('$0 \to 1$' oder '$1 \to 0$').

Zeigen Sie: Beim Hochzählen eines Binärzählers von 0 bis n braucht man *im Mittel* pro Zählschritt höchstens konstant viele Elementarschritte. Wie groß ist diese Konstante?

Aufgabe 4.2: Bereichsbaum (4 Punkte)

Sei D die Punktmenge $\{(1,1),(2,4),(3,3),(3,5),(4,6),(5,7),(6,2)\}$ in der Ebene. Geben Sie alle Teilbäume eines 2-dimensionalen Bereichsbaumes für D an, die zur Beantwortung der Bereichsanfrage $q = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] = [1.5, 6.5] \times [4.5, 6.5]$ benötigt werden und skizzieren Sie die Bereichsanfrage.

Aufgabe 4.3: Zerlegbare Anfragen (4 Punkte)

Die in der Vorlesung vorgestellte generische Dynamisierung setzt voraus, dass Anfragen an die Datenstruktur *zerlegbar* sind. Das heißt, wir verlangen, dass ein binärer Operator $\otimes$ existiert, sodass für jede Binärdarstellung $V_1, \ldots, V_{\lfloor \log n \rfloor}$ von V gilt:

$$\operatorname{query}(V, q) = \otimes\left(\operatorname{query}(V_1, q), \ldots \otimes\left(\operatorname{query}(V_{\lfloor \log n \rfloor - 1}, q), \operatorname{query}(V_{\lfloor \log n \rfloor}, q)\right) \ldots\right)$$

wobei $\otimes$ in konstanter Zeit ausgewertet werden kann.

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Zerlegbarkeit der folgenden vier Anfragetypen:

Lineare Programmierung: Ist q eine zulässige Lösung? Das heißt, erfüllt $q \in \mathbb{R}^n$ die gespeicherten linearen Nebenbedingungen

$$\begin{array}{llll}
a_{11}q_1 & + \ldots & + a_{1n}q_n & \leq b_1 \\
a_{21}q_1 & + \ldots & + a_{2n}q_n & \leq b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}q_1 & + \ldots & + a_{mn}q_n & \leq b_m
\end{array}$$

Extrempunktberechnung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Welcher gespeicherte Punkt maximiert f?

Konvexe Hülle – Elementtest: Liegt q innerhalb der konvexen Hülle der gespeicherten Punkte?

Konvexe Hülle – Lokale Sicht: In welchem kleinsten Winkelfeld mit Scheitel q liegt die konvexe Hülle der gespeicherten Punkte?