Grundlagen der alg. Geometrie
Wintersemester 2018/2019

Abgabe: optional in Übungen
Besprechung: 28.11.

Dr. Herman Haverkort
Dr. Anne Driemel
Institut für Informatik

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1: Konvexe Hülle Extremfälle (4 Punkte)

Gegeben sei eine Menge S von n Punkten in der Ebene. Nehmen wir an, wir wissen bereits, dass jeder Punkt aus S auf dem Rand der konvexen Hülle $ch(S)$ von S liegt.

Können Sie unter dieser Voraussetzung einen Algorithmus konstruieren, der die konvexe Hülle von S in Zeit $O(n)$ berechnet?

Aufgabe 6.2: Dualität in 3D (4 Punkte)

Wir betrachten nun die Dualität zwischen Punkten und Ebenen im 3-dimensionalen kartesischen Raum, die folgendermaßen definiert werden kann: Das Duale $p^\star$ eines Punktes $p = (a, b, c)$ ist die Ebene $p^* : z = ax+by-c$. Das Duale E^* einer Ebene $E : z = ax + by + c$ ist der Punkt $E^* = (a, b, -c)$.

Zeigen Sie, dass auch hier Inzidenz und relative Ordnung bei der Dualitätstransformation erhalten bleiben, d.h. dass gilt:

1. Erhaltung der Inzidenz: $p \in E$, genau dann wenn $E^* \in p^*$.
2. Erhaltung der relativen Ordnung: p liegt oberhalb (bzgl. der z-Koordinate) von E, genau dann wenn E^* oberhalb von p^* liegt.

Aufgabe 6.3: Konvexe Hülle in 3D vorsortiert (4 Punkte)

Sei S eine Menge von Punkten $\{p_1, \ldots, p_n\}$ in $\mathbb{R}^3$, wobei die z-Koordinaten der n Punkte sortiert sind, d.h. $z(p_1) < z(p_2) < \ldots < z(p_n)$.

Zeigen Sie, dass die Komplexität der Konstruktion der konvexen Hülle von S trotz der sortierten z-Koordinaten der Punkte $\Omega(n \log n)$ ist.

Aufgabe 6.4: Alternative Definition der konvexen Hülle (4 Punkte)

Sei P eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und sei $varch(P)$ die Menge aller Punkte, die sich im Inneren oder auf dem Rand eines Dreiecks befinden, welches durch Punkte in P gebildet werden kann.

(a) Zeige, dass $varch(P) = ch(P)$.

(b) Kann diese alternative Definition der konvexen Hülle auf höhere Dimensionen erweitert werden?