Algorithmen und Berechnungskomplexität II, SS 13
Typische Klausuraufgaben
Universität Bonn, Institut für Informatik, Abteilung I

Aufgabe 1: Beweistechnik

a) Definieren Sie den Begriff *überabzählbar*!

b) Betrachten Sie die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. In der Vorlesung wurde diese Menge mit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ bezeichnet. Zeigen Sie mittels des *Diagonaltricks*, dass die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist.

c) Welche wichtige Folgerung wurde in der Vorlesung aus der obigen Aussage gezogen?

Aufgabe 2: Entscheidbarkeit 1

a) Definieren Sie, was eine deterministische 1-Band Turingmaschine ist. D.h. geben Sie die Elemente der Maschine und deren Bedeutung an.

b) Was bedeutet es, dass eine Turingmaschine eine Sprache L entscheidet bzw. eine Sprache L akzeptiert?

c) Ist die Sprache L, gegeben durch $L = L_1 \cup L_2$ mit

$L_1 = \{\langle M \rangle \mid \text{M hält nicht auf der leeren Eingabe}\}$ und
$L_2 = \{\langle M \rangle \mid \text{hält auf der leeren Eingabe, aber frühestens nach 100 Schritten}\}$

entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3: Entscheidbarkeit 2

a) Definieren Sie die Klasse DTIME$(t(n))$ durch DTMs. Legen Sie auch $t(n)$ genau fest.

b) Definieren Sie die Klasse P durch DTIME.

b) Wir betrachten die folgende Sprache P'.

$$P' := \{\langle M \rangle \mid M \text{ entscheidet eine Sprache aus } P\}$$

Ist P' entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort mit dem Satz von Rice!

Aufgabe 4: Turingmaschine

a) Geben Sie alle Elemente (5-Tupel) einer Turingmaschine mit dem Zeichensatz $\{0, 1, \sqcup, \$\}$ an, die die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ berechnet. Die Übergangsfunktion soll in einer Tabelle angegeben werden, der Kopfzeiger soll am Ende auf dem ersten Element des Bandes positioniert sein.

   Die Eingabe und die Ausgabe ist binär kodiert.

b) Geben Sie die Laufzeit Ihrer Maschine in O-Notation mit Begründung an!

Aufgabe 5: **Reduktion**

a) Definieren Sie den Begriff der polynomiellen Reduktion $\leq_p$.

b) Zeigen Sie, dass die Relation $\leq_p$ transitiv ist! Formulieren Sie zunächst die Aussage dazu!

Betrachten Sie die folgenden beiden Probleme:

Hamiltonian-Circle Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$. Frage: Gibt es Rundtour so dass jeder Knoten aus V genau einmal besucht wird?

Hamiltonian-Path Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$. Frage: Gibt es einen Pfad (offene Tour) so dass jeder Knoten aus V genau einmal besucht wird?

c) Reduzieren Sie das Hamiltonian-Circle Problem in Polynomialzeit auf das Hamiltonian-Path Problem (nicht umgekehrt!). Geben Sie die Laufzeit der Reduktion in Abhängigkeit von $|V|$ und/oder $|E|$ an, und begründen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktion!