Grundlagen der Algorithmischen Geometrie SS 2013
Übungsblatt 1
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass man vier offene Einheitskreise so innerhalb eines Quadrates der Seitenlänge 4,8 platzieren kann, dass sich keine zwei von ihnen schneiden.

Beweisen Sie, dass das für fünf offene Einheitskreise nicht mehr möglich ist.

Ein offener Einheitskreis mit Mittelpunkt M ist hierbei die Menge

$$B_1(M) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|M - P\|_2 < 1\}$$

Aufgabe 2:

Seien $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle (die sich möglicherweise schneiden). Geben Sie einen $O(n \log n)$-Algorithmus an, der das Maß von $\bigcup_{k=1}^n I_k$ berechnet. (D.h. die Gesamtlänge aller Intervalle, aus denen $\bigcup_{k=1}^n I_k$ besteht, aufsummiert. Beachte, dass diese Zahl normalerweise kleiner ist, als die Summe der ursprünglichen Intervalllängen).

Aufgabe 3:

Betrachte folgendes Problem:

Input: Eine Menge $\mathcal{Q} = \{Q_0, \ldots, Q_{n-1}\}$ achsenparalleler Quadrate der Seitenlänge 1, gegeben als unsortiertes Array von Paaren (x_i, y_i), wobei $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ den linken unteren Eckpunkt von $Q_i \in \mathcal{Q}$ bezeichnet, die Eckpunkte von Q_i sind also (x_i, y_i), $(x_i + 1, y_i)$, $(x_i + 1, y_i + 1)$, $(x_i, y_i + 1)$.

Gesucht ist: Die maximale Fläche des Schnitts zweier verschiedener Quadrate aus $\mathcal{Q}$, $\max_{i \neq j} Area(Q_i \cap Q_j)$.

Entwerfen Sie einen Sweep-Algorithmus mit Zeitkomplexität $O(n \log n)$ nach dem Vorbild des Algorithmus zum Finden des dichtesten Punktepaares aus der Vorlesung und zeigen Sie dessen Korrektheit. (Nehmen Sie dabei an, dass für alle $i \neq j$ gilt, dass $x_i \neq x_j$.)