

## Übungsblatt 1

### Aufgabe 1.1

3+3 Punkte

Geben Sie die formale Darstellung der Sprache für die nachfolgenden Entscheidungsprobleme an. Machen Sie sich dabei insbesondere Gedanken zur Kodierung der Eingabe, zur Eingabelänge und zur Alphabetgröße.

- Ein Hamiltonpfad in einem gerichteten Graphen  $G$  ist ein gerichteter Weg in  $G$ , in dem jeder Knoten von  $G$  genau einmal vorkommt. Die Sprache des Hamiltonpfad-Problems  $L_{\text{Hamilton}}$  enthält alle gerichteten Graphen, die mindestens einen Hamiltonpfad besitzen.
- Das Subset-Sum-Problem erhält als Eingabe eine Menge  $M$  von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl  $b$ . Die Sprache  $L_{\text{Subset-Sum}}$  beinhaltet alle Paare  $(M, b)$ , für die es eine Teilmenge  $S \subseteq M$  mit  $\sum_{s \in S} s = b$  gibt.

### Aufgabe 1.2

6 Punkte

Wir betrachten die Turingmaschine  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \square, q_0, \bar{q}, \delta)$  mit  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \bar{q}\}$ ,  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $\Gamma = \Sigma \cup \{\square\}$  und der Zustandsübergangsfunktion  $\delta$ , gegeben durch folgende Tabelle:

	0	1	$\square$
$q_0$	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_1, \square, L)$
$q_1$	$(q_2, \square, R)$	$(q_3, \square, R)$	$(\bar{q}, \square, R)$
$q_2$	$(q_4, 0, L)$	$(q_4, 0, L)$	$(q_4, 0, L)$
$q_3$	$(q_4, 1, L)$	$(q_4, 1, L)$	$(q_4, 1, L)$
$q_4$	$(q_4, 1, L)$	$(q_4, 0, L)$	$(q_1, \square, L)$

Beschreiben Sie das Verhalten von  $M$  auf einer beliebigen Eingabe  $w \in \{0, 1\}^*$ . Erläutern Sie kurz die Bedeutung der einzelnen Zustände. Gibt es Einträge in der Tabelle, die nur der Vollständigkeit halber existieren und nie benötigt werden?

### Aufgabe 1.3

6 Punkte

Es soll eine Turingmaschine über dem Eingabealphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$  und dem Bandalphabet  $\Gamma = \Sigma \cup \{\square\}$  konstruiert werden, die die Sprache  $L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$  entscheidet. Dabei sei  $w^R = \varepsilon$  für  $w = \varepsilon$  und  $w^R = w_n \dots w_1$  für  $w = w_1 \dots w_n$ . Beschreiben Sie zunächst die benötigten Zustände und die Vorgehensweise in den einzelnen Zuständen. Geben Sie dann die Zustandsübergangsfunktion in Form einer Tabelle an.

*Hinweis:* Die Eingabe kann bei Bedarf überschrieben werden.

### Aufgabe 1.4

3+3 Punkte

- Sei  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \square, q_0, \bar{q}, \delta)$  eine Turingmaschine, deren Speicherplatzbedarf für eine Eingabe der Länge  $n$  maximal  $s(n)$  beträgt. Zeigen Sie, dass falls  $M$  auf einer Eingabe  $w$  der Länge  $n$  hält, dann spätestens nach  $(|Q| - 1) \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n) + 1$  Schritten.
- Gegeben sei eine Turingmaschine  $M$  mit Laufzeitschranke  $t(n)$ , die eine Sprache  $L$  entscheidet. Unser Ziel ist es, eine Turingmaschine  $M'$  mit Laufzeitschranke  $O(t(n))$  zu konstruieren, die die Sprache  $L$  entscheidet und ein einseitig beschränktes Band besitzt: Die Eingabe sei links von einem Trennzeichen  $\#$  und rechts vom Leerzeichen  $\square$  begrenzt. Der Schreib-Lese-Kopf von  $M'$  darf nie links vom Trennzeichen  $\#$  stehen. Beschreiben Sie in Worten, wie man  $M'$  aus  $M$  konstruieren kann.

*Hinweis:* Das Bandalphabet  $\Gamma' \supseteq \Gamma$  von  $M'$  darf größer sein als das von  $M$ .