Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner

Algorithmen und Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2014
Abgabe: 25.06.2014, 12:30 Uhr

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

6 Punkte

Für eine Marsmission werden Experten für n Fachgebiete (Astronomie, Geologie, Technik, Physik, Informatik, Biologie, ...) benötigt. Es stehen m Freiwillige zur Verfügung. Für jede Person ist bekannt, auf welchen dieser Gebiete sie Experte ist. Die Aufgabe ist es, eine Besatzung aus möglichst wenigen Personen zusammenzustellen, sodass es für jedes Fachgebiet mindestens einen Experten gibt.

Geben Sie eine mengentheoretische Formalisierung der Entscheidungsvariante von `MISSION TO MARS` an und zeigen Sie, dass das Problem $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Hinweis: Zum Beweis der NP-Vollständigkeit genügt es, eine polynomielle Reduktion eines bekannten $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems auf `MISSION TO MARS` anzugeben.

Aufgabe 10.2

6 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge $X \subseteq V$ heißt *Dominating Set* von G, wenn jeder Knoten von G in X liegt oder adjazent zu einem Knoten aus X ist. Bei der *Entscheidungsvariante* von `DOMINATING SET` soll für einen gegebenen Graphen G und eine gegebene natürliche Zahl k entschieden werden, ob G ein Dominating Set mit höchstens k Knoten besitzt.

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvariante von `3-SAT` polynomiell auf die Entscheidungsvariante von `DOMINATING SET` reduzieren lässt.

Aufgabe 10.3

6 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge $M \subseteq E$ heißt *Matching*, wenn die Kanten von M paarweise knoten disjunkt sind, d.h. $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ für alle $e_1, e_2 \in M$ mit $e_1 \neq e_2$. Eine Menge $I \subseteq V$ heißt *Independent Set* von G, wenn innerhalb von I keine Kante verläuft, d.h. I ist eine Clique im Komplementgraphen $\overline{G}$. Bei den *Entscheidungsvarianten* von `MATCHING` und `INDEPENDENT SET` soll für einen gegebenen Graphen G und eine gegebene natürliche Zahl k entschieden werden, ob G ein Matching beziehungsweise ein Independent Set der Größe mindestens k besitzt.

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvariante von `MATCHING` polynomiell auf die Entscheidungsvariante von `INDEPENDENT SET` reduzieren lässt.

Präsenzaufgabe

Wir betrachten die Variante `EXACT VERTEX COVER` des Problems `VERTEX COVER`. Eingabe hierfür ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

- Bei der Entscheidungsvariante von `EXACT VERTEX COVER` geht es um die Frage, ob ein Vertex Cover $X \subseteq V$ existiert, sodass jede Kante von G mit genau einem Knoten aus X inzident ist. Eine solche Menge nennen wir ein *exaktes Vertex Cover* von G.
- Bei der *Optimierungsvariante* von `EXACT VERTEX COVER` soll ein minimales exaktes Vertex Cover von G bestimmt werden.

Kann die Entscheidungvariante von `EXACT VERTEX COVER` in polynomieller Zeit gelöst werden oder ist sie NP-Vollständig? Kann die Optimierungsvariante in polynomieller Zeit gelöst werden?